539.4(076)
73

INSTITUTUL DE CONSTRUCTII BUCUREȘTI

Ing. Dragomir Sergiu

Ing. Ieremia Mircea

CULEGERE DE PROBLEME DE REZISTENȚA MATERIALELOR

VOL. II

1967

Cap.VI. DEFORMATIA BARELOR

1. Metoda generala de integrare a ecuaţiei fibrei medii deformate a unei bare solicitate la incovoiere, porneşte de la relaţia :

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Mx}{EI}$$

Am ales sensul axei y în jos (în caz daca axa y ar avea sensul pozitiv in sus am pune semnul +)

Expresiile rotirii ($\frac{dy}{dx}$) şi deplasării y, se obţin din integrări succesive a relaţiei de mai sus :

$$EI\frac{dy}{dx} = -\int Mx\,dx + C$$

$$EIY = -\iint Mx\,dx\,dx + Cx + D$$

Vom obţine pentru n cîmpuri, 2 n ecuaţii cu 2 n constante, pe care le vom determina punînd 2 condiţii de reazeme şi 2(n-1) condiţii la graniţele dintre diferitele cîmpuri de variaţie a momentului încovoietor, cîte două la fiecare punct de separare.

2. Cazul cel mai general al ecuaţiei fibrei medii deformate este atunci cînd necunoscîndu-se expresia momentului încovoietor porneşte de la o ecuaţie diferenţiala de ordinul IV de forma :

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = +q(x)$$

După patru integrări succesive obţinem expresia forţei tăietoare a momentului încovoietor, a rotirii şi a deplasării, (săgeţii) intervenind în expresiile lor şi patru constante care se determină punînd condiţii la limita cîmpurilor diferite de variaţie a sarcinii $q(x)$ precum şi la reazeme

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -T(x) + A$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M(x) + Ax + B$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\int M(x)\,dx + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$$

$$EIy = -\iint M(x)\,dxdx + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D$$

3. Metoda Clebesch utilizează un artificiu prin care se

ajunge ca pentru n cîmpuri de variaţie a momentului încovoietor, să apară o singură constantă, care se determină punînd cea de a doua condiţie la reazer

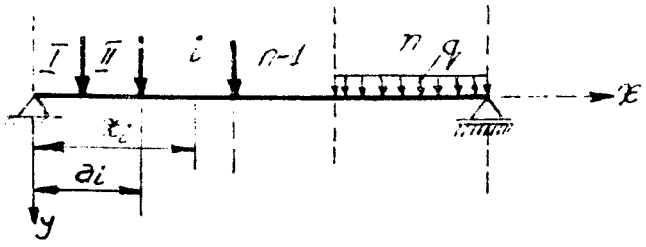


Fig. 218

La această metodă, se admite ca pentru toate cîmpurile de variaţie a momentului se porneşte de la acelaşi origine iar integrarea binomului de tipul (xi-ai) se face ca pentru o singură variabilă, (prima integrală a binomului (xi-ai) devine

$$\frac{(x_1 - a_1)^2}{2} \quad \text{etc}$$

4. Influenţa forţei tăietoare la grinzi supuse la încovoiere, se resimte numai la grinzile foarte scurte şi puternic încărcate. Deplasarea datorită forţei tăietoare are expresia :

$f_T = k \frac{M}{GA}$ unde k este un coeficient de formă care caracterizează secţiunea, de obicei egal cu 1,2.

5. Prin metoda grafo-analitică, ecuaţiile deformatei se scriu sub forma :

$$EI \left(\frac{dy}{dx} - tg \varphi_0\right) = - \Omega_{ox}$$

$$EI \left(y - y_0 - x\, tg \varphi_0\right) = - S x_o$$

în care s-au notat cu :

φ_o - rotirea iniţială a axei deformate (x = o)

y_o - deplasarea în origină a axei deformate

Ω_{ox} - suprafaţa diagramei de momente încovoietoare între origină şi o secţiune curentă.

Sxo - momentul static al diagramei de momente încovoietoare dintre secţiunea x = o şi secţiunea curentă , în raport cu secţiunea x.

In figura alaturată se va arăta pentru cîteva cazuri întîlnite mai des în practică, caracteristicile geometrice care interesează .

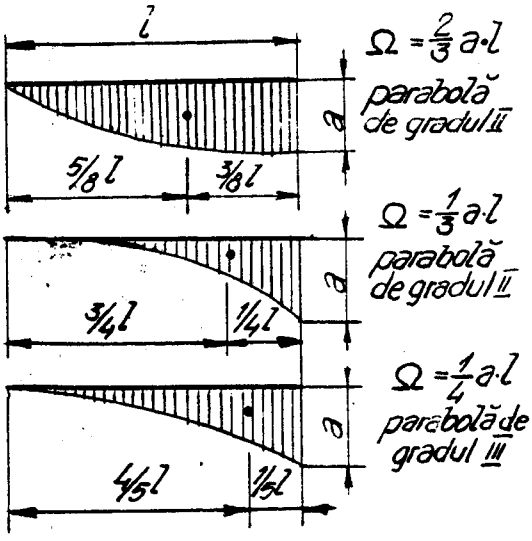


Fig 219

6. Metodele grinzilor conjugate, fictive, sau virtuale, folosesc următoarele relaţii pentru determinarea rotirii şi deplasării :

$$\varphi = \frac{\overline{T}}{EI}$$

$$y = \frac{\overline{M}}{EI}$$

unde φ şi y sînt rotirea şi deplasarea grinzii reale într-o anumită secţiune, iar $\overline{T}$ şi $\overline{M}$ sînt forţe tăietoare şi respectiv momentul încovoietor în aceiaşi secţiune pe grinda conjugată, avînd ca sarcină diagrama de momente încovoietoare.

Între rezemările grinzii reale şi cele corespunzătoare grinzii conjugate, există legătura care este redată în tabloul alăturat .

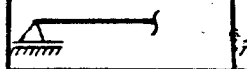
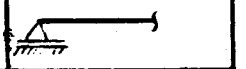
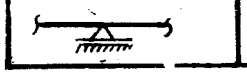
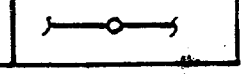
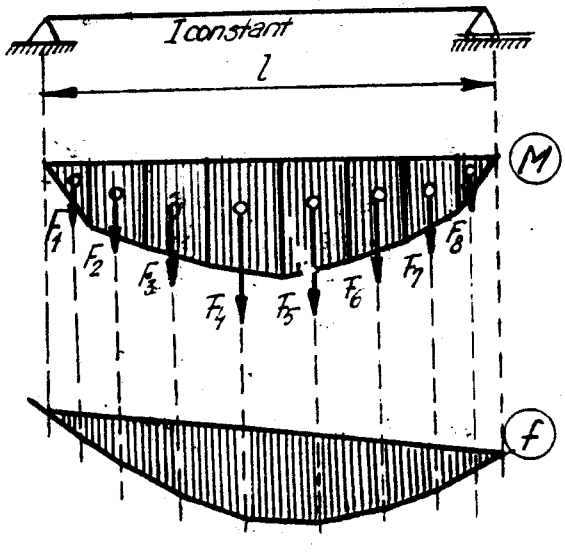
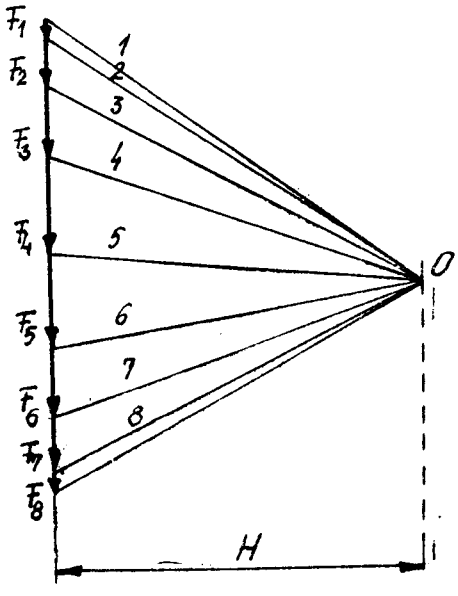
Grinda reală	Grinda conjugată
	
	

Fig. 220

7. Metoda grafică se foloseşte cînd utilizarea unor metode analitice este greoaie





a) Pentru o grindă încărcată, având moment de inerţie constant, se construeşte curba de momente încovoietoare grafic, sau analitic.

Împărţim diagrama de momente în triunghiuri şi trapeze şi apoi considerînd suprafeţele drept fictive F_1, F_2 ... F_i măsurate în $kgcm^2$, se construeşte un poligon de forţe, avînd ca pol punctul O cu o distanţă polară H şi apoi un poligon funicular, care reprezintă chiar deplasările (săgeţile) grinzii.

Scara deplasărilor va fi :

$$1\ cm = \frac{abH}{EI}\ cm$$

unde $\frac{1}{a}$ şi $\frac{1}{b}$ sînt scara lungimilor şi respectiv scara forţelor fictive, adică :

1 cm din epură = a" cm la scara lungimilor

1 cm din epură = b" $kgcm^2$ la scara forţelor fictive.

Dacă se alege o distanţă polară : $H = \frac{EI}{ab}$ cm, deplasările vor fi reprezentate la scara naturală; uneori distanţa polară este prea mare, atunci se va considera: $H = \frac{1}{n}\ \frac{EI}{ab}$ cm, adică de n ori mai mică, iar deplasările în acest caz vor fi de n ori mai mari.

b) Dacă grinda are secţiuni cu moment de inerţie variabil de exemplu I_1 şi I_2, se aleg distanţele polare corespunzătoare, diferite

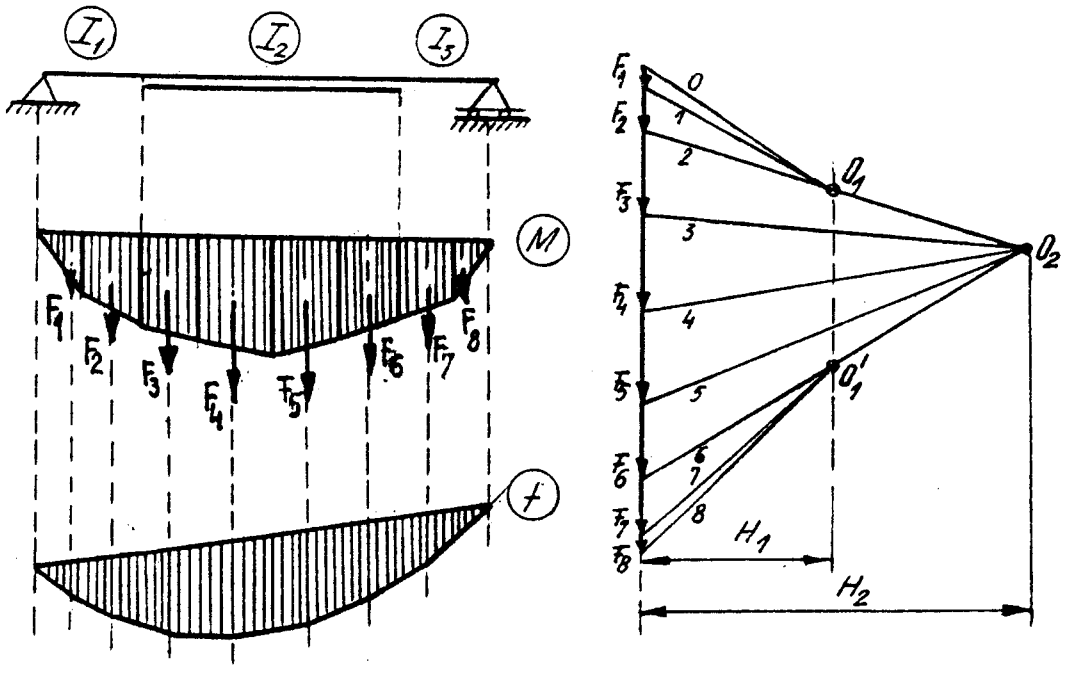


Fig. 112

Dacă forţele fictive rezultate din încărcarea cu momente încovoietoare sînt F_1, F_2 .. F, distanţele polare vor fi H_1 şi H2, egale cu :

$$H_1 = \frac{EI_1}{ab} \text{ şi } H_2 = \frac{EI_2}{ab}$$

avînd polul O_1 pentru porţiunea grinzii cu moment de inerţie I_1 şi O_2 pentru porţiunea cu moment de inerţie I_2.

Epura se va întocmi astfel: după care s-a trasat diagrama de momente încovoietoare şi s-au determinat forţele fictive F_1, F_2 ... provenite din suprafeţele de momente, se face poligonul forţelor avînd polii O_1 şi O_2 la distanţele stabilite H_1 şi H_2.

Se duc apoi razele polare 1, 2, 3, corespunzătoare rîşiilor ce cad în zona de moment de inerţie I_1; ultima rază polară (3) a primei zone, se va prelungi pînă la O_2 corespunzător distanţei polare H_2, iar raza polara 7, va determina poziţia polului O_1, forţele fictive F_7 şi F_8 aflîndu-se în porţiunea grinzii cu momentul de inerţie I_1.

Se face apoi poligonul funicular care determină deformata grinzii.

8. La metoda parametrilor iniţiali - metoda Krilov, se exprimă rotirea şi deplasarea într-o secţiune, în funcţie de cei patru parametrii iniţiali M_A, T_A, φ_A şi y_A, precum şi de încărcarea exterioară, care intervine sub forma unei funcţii $\delta(x)$ la expresia deplasării şi sub forma derivaţiei ei $\delta'(x)$ la expresia rotirii :

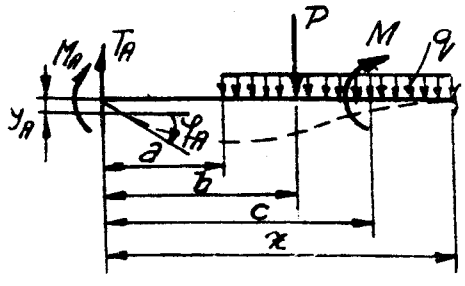


Fig. 223

$$EI\varphi = EIy' = EI\varphi_A + M_A \frac{x}{1!} + \frac{T_A x^2}{2!} - \delta'(x)$$

$$EI_y = EI_{yA} + EI\frac{x}{1!} + M_A \frac{x^2}{2!} + \frac{T_A x^3}{3!} - \delta(x)$$

Expresiile δ_x şi δ_x' sînt de forma :

$$\delta(x) = \frac{q(x-a)^3}{3!} + \frac{P(x-b)^2}{2!} + \frac{M(x-o)}{1!}$$

$$\delta'(x) = \frac{q(x-a)^4}{4!} + \frac{P(x-b)^3}{3!} + \frac{M(x-c)^2}{2!}$$

In cazul general, ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate se poate scrie :

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -q(x)$$

Soluţia omogena a acestei ecuaţii diferenţiale, este :

$$EI_y = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x}{1!} + C_4$$

iar soluţia particulara dupa regula Cauchy, este :

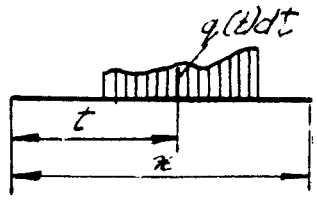


Fig. 224

$$EI\bar{y} = -\frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 q(t)\,dt$$

9. Metoda lui Castigliano se bazează pe principiul că derivata energii potenţiale de deformaţie în raport cu forţa aplicată într-un punct anumit, este egală cu deplasarea acestui punct pe direcţia forţei respective, iar rotirea este egală cu derivata energiei potenţiale de deformaţie în raport cu momentul aplicat în acest punct.

In cazul cel mai general, avem :

$$y = \frac{U_i}{\partial P} = \int_L \frac{Mi}{EI_z}\frac{\partial M_z}{\partial P}\,ds + K\int_L \frac{T}{GA}\frac{\partial T}{\partial P}\,ds + \int_L \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P}\,ds +$$

$$+ \int_L \frac{M_r}{GI_r}\frac{\partial M_r}{\partial P}\,ds$$

$$\varphi = \frac{\partial U_i}{\partial M_6} = \int_L \frac{M_i}{EI_z}\frac{\partial M_i}{\partial M_6}\,ds + K\int_L \frac{T}{GA}\frac{\partial T}{\partial M_6}\,ds + \int_L \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial M_6}\,ds$$

$$+ \int_L \frac{M_r}{GI_r}\frac{\partial M_r}{\partial M_6}\,ds$$

In cazul unei grinzi încovoiate, expresiile de mai sus se reduc la :

$$y = \int_L \frac{Mi}{EI_z}\frac{\partial M_i}{\partial P}\,ds$$

$$\varphi = \int_L \frac{Mi}{EI_z}\frac{M_i}{\partial M_6}\,ds$$

unde P şi M_6 , sînt forţa şi momentul aplicate în punctul unde se calculează deplasarea, respectiv rotirea.

10. Metoda Maxwell-Mohr se poate deduce direct sau pornind de la metoda Castigliane, propunîndu-şi să înlocuiască derivatele parţiale de forma :

$\frac{\partial Mi}{\partial P}$, $\frac{\partial T}{\partial P}$, $\frac{\partial N}{\partial P}$ şi $\frac{\partial M_r}{\partial P}$ cu m_i, t, n, m_r , care reprezintă momentul încovoietor, forţa tăietoare, forţa axială şi momentul răsucitor într-o secţiune curentă care apar în urma aplicării în secţiune a unei forţe unitare (P = 1).

In mod analog, derivatele $\frac{\partial Mi}{\partial M_6}$, $\frac{\partial T}{\partial M_6}$, $\frac{\partial N}{\partial M_6}$ şi $\frac{\partial M_r}{\partial M_6}$, se notează

cu mi, t, n, m_t reprezentînd momentul încovoietor, forţa tăietoare, forţa axială şi momentul răsucitor într-o secţiune curentă care se naşte cînd în secţiunea respectivă se aplică un moment unitar ($\gamma\!\!\!/ = 1$).

În concluzie, în cazul cel mai general expresiile deplasării şi rotirii se pot scrie :

$$y = \int_L \frac{Mi}{EIz} m_i \, ds + K \int_L \frac{T}{A} t \, ds + \int_L \frac{N}{EA} n \, ds + \int_L \frac{M_r}{GI_r} m_t \, ds$$

11. Vereşceaghin aduce o exprimare nouă în calculul deformaţiilor bazîndu-se pe metoda Maxwell-Mohr, şi anume, integralele de tipul $\int_L \frac{Mi}{EI} mi \, ds$, se pot calcula înmulţind suprafaţa diagramei de momente încovoietoare Ω_x, cu ordinata η din diagrama mi corespunzător centrului de greutate G, al diagramei de momente M_i. Deci se poate scrie egalitatea : $\int \frac{Mi}{EI} mi \, ds = \Omega \cdot \eta$, iar calculul se face pe zone, în funcţie de variaţia diagramei momentului încovoietor Mi şi a celei unitare mi.

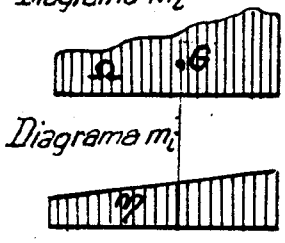


Fig. 225

12. Metoda variaţională Ritz-Timoşenco are ca principiu ca în loc să se determine deplasarea y (x) din integrarea ecuaţiei diferenţiale, se consideră axa y (x) dată, sub forma unei serii finite sau infinite de funcţii f1, f2....

$$y = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots$$

unde funcţiile f_1, f_2 ... sînt funcţii arbitrare însă ortogonale care trebue să mai satisfacă şi condiţiile la limită, iar coeficienţii a_1, a_2 ... se deduc din condiţia de energie potenţială totală Π să fie minimă, adică:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0$$

12. Ca o remarcă se poate considera în cazul cînd avem acelaş fel de rezemare la ambele capete, că săgeata este cea de la mijlocul deschiderii, iar dacă numai unul din capete este încastrat iar celalalt este reazem simplu sau articulaţie, săgeata se va găsi la o treime din deschidere către capătul articulat, aceasta chiar dacă în mod teoretic rezultă că deplasarea are valoarea maximă în altă secţiune, erorile rezultate sînt foarte mici, neglijabile faţă de deplasarea din mijlocul deschiderii.

6.1. Să se studieze deformata unei grinzi simplu rezemate încărcate uniform, cu ajutorul metodei generale de integrare a

ecuației fibrei medii deformate.

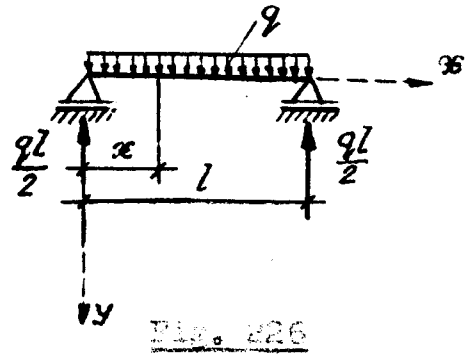


Fig. 426

Se va calcula deplasarea maximă - săgeata precum și rotirea la reazem.

Se va lua exemplu numeric pentru
q = 200 kg/ml
l = 3,00 m
Grinda este din lemn și are secțiune dreptunghiulară

$\sigma_a = 100\ kg/m^2$
$E = 10^5\ kg/cm^2$

Momentul încovoietor într-o secțiune curentă are expresia

$$M_x = \frac{q \cdot l}{2} - x - \frac{qx^2}{2}$$

Avînd o singură porțiune de variație, vom avea :

$$E\,I\,y'' = -\,M_x = -\,\frac{q\,l}{2}\,x + \frac{q\,x^2}{2}$$

Integrînd de două ori consecutiv:

$$E\,I\,y = -\,\frac{q\,l}{12}\,x^3 + \frac{q\,x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Deci apar 2 constante pe care va trebui să le determinăm punînd două condiții inițiale și anume :

pentru $x = 0 \longrightarrow y = 0$ de unde rezultă $C_2 = 0$
pentru $x = l \longrightarrow y = 0$

Din a doua condiție reiese valoarea lui C_1 :

$$0 = \frac{q\,l^4}{12} + \frac{q\,l^4}{24} + C_1\,l$$

de unde

$$C_1 = +\,\frac{q\,l^3}{24}$$

Deci cele două ecuații care definesc deformata grinzii se pot scrie astfel :

$$E\,I\,y' = -\,\frac{q\,l}{4}\,x^2 + \frac{q\,x^3}{6} + \frac{q\,l^3}{24}$$

$$E\,I\,y = -\,\frac{q\,l}{12}\,x^3 + \frac{q\,x^4}{24} + \frac{q\,l^3}{24}\,x$$

Pentru diverse valori ale lui x se pot calcula rotiri și deplasări în diverse secțiuni.

Rotirea maximă este la reazeme.

pentru $x = 0$ $\quad E\,I\,y'_{max} = \frac{q\,l^3}{24} \quad y'_{max} = \frac{q\,l^3}{24EI}$

Deplasarea maximă este la mijlocul grinzii.

pentru $x = \frac{l}{2}$ $EIy_{max} = -\frac{ql}{12} \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{q}{24} \cdot \frac{l^4}{16} + \frac{q\,l^3}{24} \cdot \frac{l}{2}$

$$E \cdot y_{max} = \frac{5\,q\,l^4}{384} \quad \text{şi} \quad y_{max} = \frac{5\,q\,l^4}{384\,EI}$$

Pentru cazul numeric, momentul de inerţie se determină dimensionându-se grinda la încovoiere

$$M_{max} = \frac{200 \times 3,0^2}{8} = 225 \text{ kg.m}$$

$$W_{nec} = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{h^3}{9} = \frac{22500}{100} = 225 \text{ cm}^3$$

$$h = \sqrt{9 \times 225} = \sqrt{20,50} = 12,7 \text{ cm}$$

$$b = \frac{12,7}{1,5} = 8,45 \text{ cm}$$

Alegem o secţiune cu dimensiunile 10 x 12 cm:

$$W_{ef} = \frac{10 \times 12^2}{6} = 240 \text{ cm}^3 \qquad I = 240 \times 6 = 1440 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{22500}{240} = 93,5 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_a$$

Rotirea maxima :

$$y'_{max} = \frac{2 \times 300^3}{24 \times 100.000 \times 1440} = 0,0156 \text{ rad.}$$

Dacă vrem să calculă în minute, rotirea este :

3,14 ..... (180 x 60)'

0,0156 ..... x'

$$x' = \frac{180 \times 60 \times 0,0156}{3,14} = 53,6'$$

Deplasarea maximă :

$$y_{max} = \frac{5 \times 2 \times 300^4}{384 \times 100.000 \times 1440} = 1,46 \text{ cm}$$

6.2. Să se calculeze expresia deplasării în A şi B pentru grinda din figură folosind metoda genarala de integrare a ecuaţiei fibrei medii deformate.

Avem 2 zone de variaţie a momentului încovoietor.

In prima zonă :

$M_x = -P_x$

$E\,I\,y'' = P\,x$

1). $E\,I\,y' = \frac{P\,x^2}{2} + C_1$ 2. $E \cdot I\,y = \frac{P\,x^3}{6} + C_1 x + C_2$

In zona II :

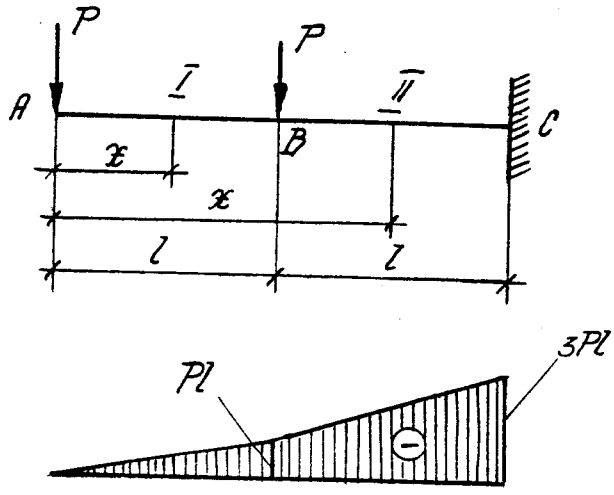


Fig. 227

$$M_x = -Px - P(x-l) = -2Px + Pl$$

$$EIy'' = 2Px - Pl$$

3) $$EIy' = Px^2 - Plx + C_3$$

4) $$EIy = \frac{Px^3}{3} - \frac{Plx^2}{2} + C_3x + C_4$$

Pentru determinarea celor 4 constante vom pune 4 condiţii iniţiale dintre care două în încastrare unde rotirea şi deplasarea sînt nule şi la frontiera dintre zona I şi II unde rotirile şi deplasările din stînga şi dreapta trebuie să fie egale.

Pentru $x_1 = x_2 = l$ $y_1' = y_2'$ şi $y_1 = y_2$ - vom aplica aceste condiţii egalînd relaţiile ① cu ③ şi ② cu ④

$$\frac{Pl^2}{2} + C_1 = Pl^2 - Pl^2 + C_3$$

$$\frac{Pl^3}{6} + C_1l + C_2 = \frac{2l^3}{3} - \frac{Pl^3}{2} + C_3l + C_4$$

Vom aplica celelalte două condiţii relaţiilor ③ şi ④ şi anume :

pentru $x_2 = 2l$ $y' = 0$

$y_2 = 0$

$$EIy' = 4Pl^2 - 2Pl^2 + C_3 = 0 \longrightarrow C_3 = -2Pl^2$$

$$EIy = \frac{8Pl^3}{3} - 2Pl^3 + C_3 \cdot 2l + C_4 = 0 \longrightarrow C_4 = \frac{10Pl^3}{3}$$

Rezultă :

$$C_1 = -\frac{3Pl^2}{2} \text{ şi}$$

$$C_2 = \frac{2l}{6}Pl^3 = \frac{2}{3}Pl^3$$

Introducînd valoarea constantelor în expresiile ① ② ③ şi ④ ale deformaţiei găsim:

$$① \quad EIy' = \frac{Px^2}{2} - \frac{Pl^2}{2}$$

$$② \quad EIy = \frac{Px^3}{6} - \frac{5Pl^2}{2}a + \frac{7Pl^3}{2}$$

Pentru zona a doua:

$$③ \quad EIy' = Px^2 - Plx - 2Pl^2$$

$$④ \quad EIy = \frac{Px^3}{3} - \frac{Plx^2}{2} - 2Pl^2x + \frac{10Pl^3}{3}$$

Pentru a stabili rotirea sau deplasarea într-o acţiune anumită vom înlocui în expresiile de mai sus x cu valoarea numerică respectivă.

6.3. Se dă grinda dublu încastrată din figură. Se cere să se determine deplasarea punctului B folosind metoda generală de integrare a ecuaţiei fibrei medii deformate.

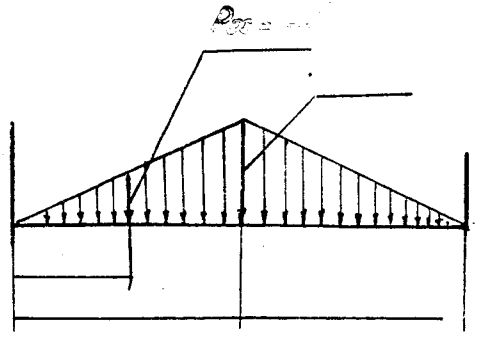


Fig. 228

Intrucît nu se poate cunoaşte expresia momentului încovoietor într-o secţiune curentă se va porni cu ecuaţia diferenţială de ordinul IV

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x) = \frac{2px}{l}$$

Vom integra expresia de mai sus de patru ori

$$T_{(x)} = EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{px^2}{l} + A$$

$$M_{(x)} = EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{px^3}{3l} + Ax + B$$

$$EI\varphi = EI\frac{dy}{dx} = -\frac{px^4}{12l} + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$$

$$EIy = -\frac{px^5}{60l} + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D$$

Pentru determinarea constantelor A,B,C, şi D va trebui să punem pentru condiţii de limită şi anume întrucît avem simetrie putem scrie :

pentru $x = 0$ $\begin{cases} y = 0 \longrightarrow D = 0 \\ \varphi = 0 \longrightarrow C = 0 \end{cases}$

pentru $x = \frac{l}{2}$ $\begin{cases} T = 0 \longrightarrow A = \frac{p\,l}{4} \\ \varphi = 0 \longrightarrow B = -\frac{5\,p\,l^2}{96} \end{cases}$

Inlocuind valoarea constantelor A, B, C şi D in expresiile de mai sus, căpătăm :

$$T_{(x)} = EI\,\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{px^2}{1} + \frac{pl}{4}$$

$$M_{(x)} = EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{px^3}{3\,1} + \frac{p\,l}{4}\,x - \frac{5\,p\,l^2}{96}$$

$$EI\,\varphi = EI\,\frac{dy}{dx} = -\frac{p\,x^4}{12\,I} + \frac{p\,l}{8}\,x^2 - \frac{5\,p\,l^2}{96}\,x$$

$$Eiy = \frac{p\,x^5}{60\,I} + \frac{pl}{24}\,x^3 - \frac{5\,pl^2}{192}\,x^2$$

Deplasarea maximă va fi în punctul B avînd valoarea :

$$EIy_{max} = -\frac{p}{60\,I}\,\frac{l^5}{32} + \frac{pl}{24}\,\frac{l^3}{8} - \frac{5\,pl^2}{192}\,\frac{l^2}{4} = \frac{13}{3840}\,pl^4$$

sau

$$y\ max = \frac{13\,pl^4}{3840\,EI}$$

6.4. Să se determine deformata grinzii din figură cu ajutorul metodei Clebsch. Să se stabilească expresia deplasării maxime cînd forţa calcă în mijlocul grinzii ($a = b = \frac{l}{2}$)

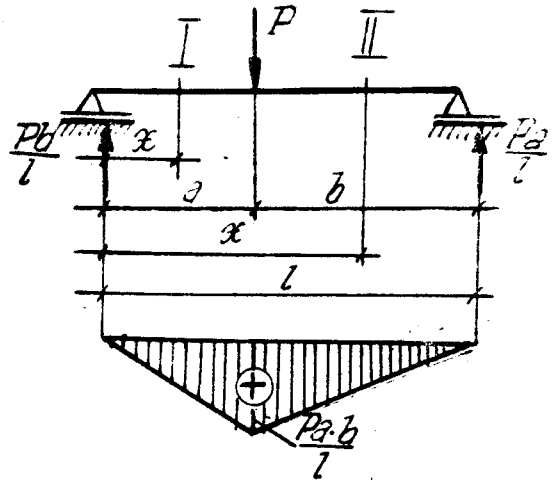


Fig. 229

Avînd două zone de variaţie a momentului încovoietor, vom avea două serii de relaţii diferenţiate pentru prima şi a doua zonă:

Zona I: $M_x = +\frac{P\,b}{l}\,x$

$$EIy'' = -\frac{P\,b}{l}\,x$$

(1) $$EIy' = -\frac{P\,b}{l}\,\frac{x^2}{2} + C_1$$

(2) $$EIy = -\frac{P\,b}{l}\,\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Zona II:

$$M_x = \frac{P\,b}{l}\,x - P\,(x - a)$$

$$EIy'' = -\frac{P\,b}{l}\,x + P\,(x - a)$$

(3) $$EIy' = -\frac{P\,b}{l}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{P\,(x - a)^2}{3} + C_3$$

$$EIy = -\frac{Pb}{6l}x^3 + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3 x + C_4$$

Având două porțiuni de variație a momentului încovoietor vom avea în total 4 constante. Vom pune 4 condiții inițiale dintre care două pe reazeme iar alte două la limita dintre cele două porțiuni unde deplasările și rotirile trebuie să fie egale pentru partea din stânga și pentru cea din dreapta (deformata trebuind să fie netedă și continuă).

$x = 0 \quad y = 0$ înlocuim în ecuația 2 și rezultă că $C_2 = 0$

pentru $\begin{cases} x_1 = a \quad y_1 = y_2 \\ x_2 = a \quad y_1 = y_2 \end{cases}$ înlocuind pe $x = a$ vom egala relațiile (1) cu (3) și respectiv (2) cu (4)

$$\frac{Pb}{l}\frac{a^2}{2} + C_1 = -\frac{Pb}{l}\frac{a^2}{2} + C_3 \qquad C_1 = C_3$$

$$-\frac{Pb}{l}\frac{a^3}{6} + C_1 l + 0 = -\frac{Pb}{6}\frac{a^3}{l} + C_1 l + C_4 \qquad C_4 = 0$$

și pentru $x = l \quad y = 0$ înlocuind în ecuația (4) obținem :

$$-\frac{Pb\,l^3}{6\,l} + \frac{P\,b^3}{6} + C_1 l = 0$$

$$C_1 = \frac{Pb\,(l^2 - b^2)}{6\,l} = \frac{P\,a\,b\,(l+b)}{6\,l}$$

Deci deformația grinzii este definită de următoarele patru relații :

In prima zona

(1) $EIy' = -\frac{Pb}{l}\frac{x^2}{2} + \frac{Pab\,(l+b)}{6\,l}$

(2) $EIy = -\frac{Pb}{l}\frac{x^3}{6} + \frac{Pab\,(l+b)}{6\,l}x$

In zona a doua

(3) $EIy' = -\frac{Pb}{l}\frac{x^2}{2} + \frac{P(x-a)^2}{2} + \frac{Pa(l-b)}{6\,l}$

(4) $EIy = -\frac{Pb}{l}\frac{x^3}{6} + \frac{P(x-a)^3}{6} + \frac{Pab\,(l+b)}{6\,l}$

Deplasarea în dreptul punctului de aplicație al forței P este :

$$EIy = -\frac{Pa^2b}{6\,l} + \frac{Pa^2(l-b)}{2} - \frac{Pa^3}{3\,l}(l-b)$$

$y = \frac{P\,a^2\,b}{3\,l\,EI}$ deplasarea maximă este undeva între mijloc și punctul de aplicație al forței P, foarte aproape de mijloc - de aceea practic se poate considera că deplasarea maximă este la mijlocul grinzii.

dacă $a = -b = \frac{l}{2}$ y devine :

$$f_{max} = \frac{l^3}{48 EI}$$

6.5.- Se dă grinda de 80cm, încastrată, cu secţiune dreptunghiulară din figură. Se cere deplasarea grinzii în punctul B ţinînd seama atît de momentul încovoietor cît şi de influenţa forţei tăietoare .

Se dă $E = 10^5$ kg/cm^2

$G = 5 \times 10^3$ kg/cm^2

$I = \frac{15 \times 20^3}{12} = 10.000$ cm^4

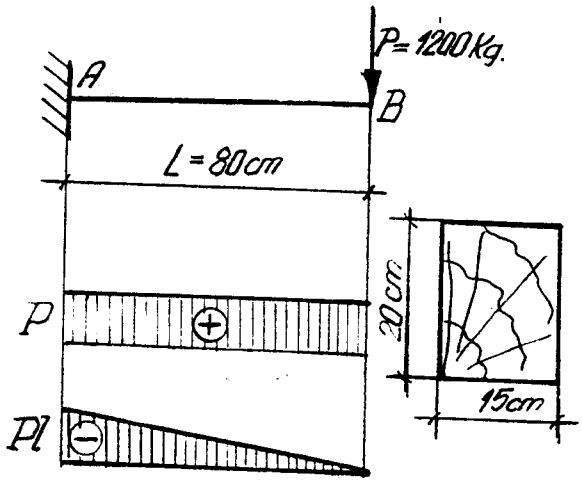


Fig. 230

Deplasarea punctului B datorită momentului încovoietor se poate calcula cu orice metodă, expresia ei fiind :

$$f_M = \frac{P l^3}{3 EI} = \frac{1200 \times 80^3}{3 \times 10^5 \times 10^4} = 0,205 \text{ cm}$$

Deplasarea datorită forţei tăietoare se calculează cu formula :

$$f_T = k \frac{\Delta M}{GA}$$

unde k este coeficientul de formă al secţiunii, pentru dreptunghi $k = 1,2$

În cazul nostru :

$$f_T = \frac{1,2 \times 96000}{5000 \times 300} = 0,0766 \text{ cm}$$

Se vede că influenţa forţei tăietoare la deplasarea totală a punctului B este importantă - circa 30% din deplasare datorită momentului încovoietor, deschiderea fiind foarte mică, forţa mare şi G la beton este foarte mic(faţă de E).

În general influenţa deplasării datorită forţei tăietoare nu întrece 5% din valoarea deplasării datorită momentului încovoietor.

Deplasarea totală este $f = f_M + f_T = 0,205 + 0,0766 = 0,2816$ cm

6.6. Se cere să se determine expresia deplasării verticale şi a rotirii punctului 2 , aplicînd metoda grafo-analitică

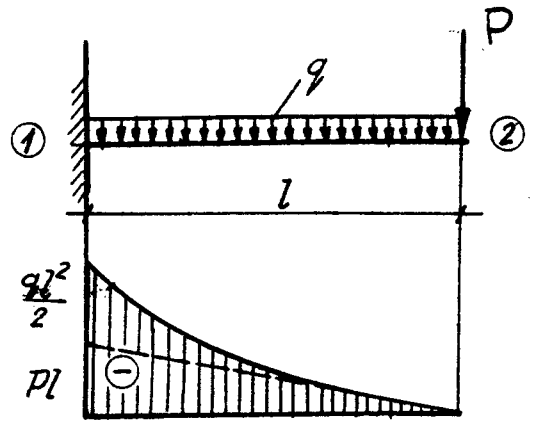


Fig. 231

Expresiile deformaţiei, respectiv cele ale deplasării şi rotirii dupa metoda grafo-analitică, sint :

① $EI\left(\frac{dy}{dx} - tg\,\varphi_1\right) = -\Omega_{1x}$

② $EI\,(y - y_1 - x\,tg\,\varphi_1) = -Sx_1$

unde :

$tg\,\varphi_1$ şi y_1 sint rotirea şi deplasarea in punctul 1 (de origina) care in cazul nostru sint nule intrucit in incastrare-deplasarea şi rotirea sînt egale cu zero.

Ω_{x_1} şi S_{x1} sint suprafaţa de momente încovoietoare dintre secţiunile 1 şi x, respectiv momentul static al diagramei de momente încovoietoare dintre secţiunile 1 şi x in raport cu secţiunea x.

Relaţiile (1) şi (2) in cazul problemei de faţă devin :

(1)' $EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\Omega_{1x}$

(2)' $EIy = -Sx_1$

Se va trasa diagrama de momente incovoietoare şi cu ajutorul ei se vor putea determina elementele Ω_{12} şi S_{21}:

$$\Omega_{12} = -\frac{Pl.l}{2} - \frac{1}{3}\cdot q\frac{l^2}{2}\cdot l = -\frac{Pl^2}{2} - \frac{ql^3}{6}$$

$$S_{21} = -\frac{Pl^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l - \frac{ql^3}{6}\cdot\frac{3l}{4} = -\frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}$$

Inlocuind în relaţiile (1)' şi (2)' vor rezulta valorile deplasării şi rotirii in punctul 2.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \varphi_2 = -\frac{\Omega_{12}}{EI} \quad \frac{\frac{Pl}{2} + \frac{ql^3}{6}}{EI}$$

$$y_2 = -\frac{S_{21}}{EI} = \frac{\frac{Pl^3}{3} + \frac{ql^4}{8}}{EI}$$

6.7. Se cere să se determine expresia deplasării verticale maxime precum şi a rotirii maxime aplicînd metoda grafo - analitică.

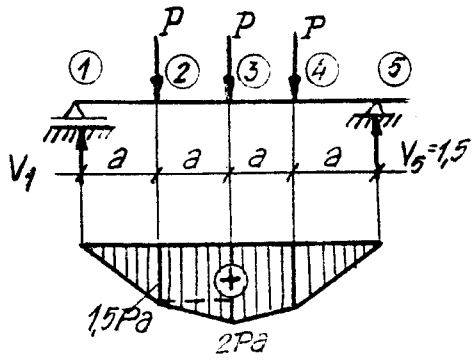


Fig. 232

Expresiile deformaţiei respectiv celei ale rotirii şi deplasării după metoda grafo-analitică sînt următoarele :

(1) $EI\left(\frac{dy}{dx} - tg\varphi_1\right) = -\Omega_1 x$

(2) $EI\left(y - y_1 - x\, tg\varphi_1\right) = -Sx_1$

unde :

$tg\varphi_1$ şi y_1 sînt rotirea şi deplasarea iniţială $\Omega_1 x$ şi Sx_1 sînt suprafaţa diagramei de momente încovoietoare între secţiunile S_1 şi x respectiv momentul static al diagramei de momente încovoietoare dintre secţiunea 1 şi x în raport cu secţiunea x.

Trasînd diagrama de momente încovoietoare vom stabili valorile y_1 şi $tg\varphi_1$. Se vede că $y_1 = o$; rotirea iniţială $tg\varphi_1$ se va determina aplicînd relaţia (1) în mijlocul grinzii unde din cauza simetriei rotirea este nulă; putem astfel să calculăm $tg\varphi_1$.

$$\Omega_{13} = \frac{1,5\ Pa.a}{2} + \frac{0,5\ Pa.a}{2} + 1,5\ Pa.a = \frac{5\ Pa^2}{2}$$

In punctul 3 relaţia (1) se scrie :

$$EI\left(o - tg\varphi_1\right) = -\frac{5\ Pa^2}{2}$$ de unde rezultă că :

$$tg\varphi_1 = \frac{5\ Pa^2}{2\ EI}$$ care este chiar rotirea maximă.

Pentru a calcula deplasarea în punctul 3 vom aplica relaţia (2) în acest punct, determinînd pentru început valoarea lui S_{3-} :

$$S_{3-} = \frac{1,5\ Pa^2}{a}\left(a + \frac{a}{3}\right) + \frac{0,5\ Pa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} + 1,5\ Pa^2 \cdot \frac{a}{2} =$$

$$= Pa^3 + \frac{Pa^3}{12} + \frac{3\ Pa^3}{4} = \frac{22\ Pa^3}{12} = \frac{11\ Pa^3}{6}$$

$$EI\left(y_3 - 2a \cdot \frac{5\ Pa^2}{2\ EI}\right) = -\frac{11\ Pa^3}{6}$$: De aici va rezulta expresia deplasării maxime y_3 :

$$y_3 = \frac{19\ Pa^3}{6\ EI}$$

6.8. Se dă grinda din figură. Se cere să se calculeze expresiile rotirii şi deplasării în punctele B şi C folosind metoda grinzilor conjugate.

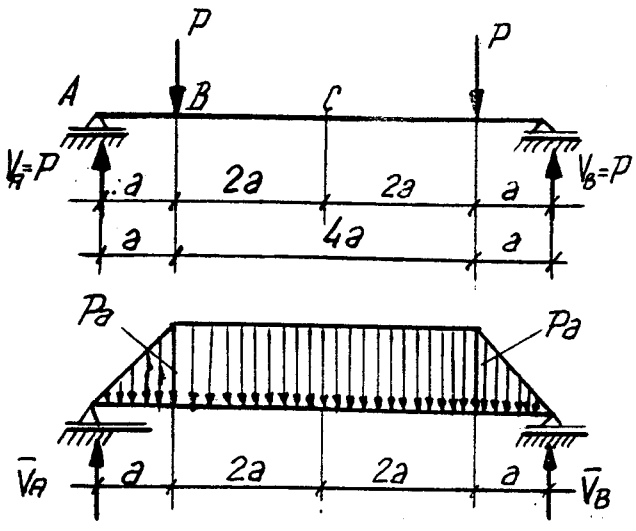


Fig. 233

Se va calcula diagrama de momente încovoietoare şi se va încărca cu ea grinda conjugata.

Se vor calcula reacţiunile grinzii conjugate încărcate cu diagrama de momente încovoietoare şi apoi se vor determina forţa tăietoare şi momentul încovoietor, în punctele unde se cere rotirea şi săgeata grinzii reale.

$$\bar{V}_A = \frac{P a^2}{2} + 2P a^2 = \frac{5 P a^2}{2}$$

$$\bar{T}_B = \frac{5 P a^2}{2} - \frac{P a^2}{2} = \frac{4 P a^2}{2} = 2 P a^2$$

$$\bar{T}_C = 2 P a^2 - 2 P a^2 = 0$$

$$\bar{M}_B = \frac{5 Pa^2}{2} \cdot a - \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{15 Pa^3 - Pa^3}{6} = \frac{7}{3} P a^3$$

$$\bar{M}_C = \frac{5 Pa^2}{2} \cdot 3a - \frac{P a^2}{2}(2a + \frac{a}{3}) - P a \cdot 2 a \cdot a =$$

$$= \frac{15 Pa^3}{2} - Pa^3 - \frac{Pa^3}{6} - 2 Pa^3 = \frac{45-6-1-12}{6} P a^3$$

$$\bar{M}_C = \frac{26}{6} P a^3 = \frac{13}{3} P a^3$$

Atunci rotirea şi săgeata în punctul B şi C va fi egală cu :

$$y'_B = \varphi_B = \frac{\bar{T}_B}{EI} = + \frac{2 Pa^2}{EI}$$

$$y_B = \frac{\bar{M}_B}{EI} = \frac{7 Pa^3}{3 EI}$$

$$y'_C = \varphi_C = \frac{\bar{T}_C}{EI} = 0$$

$$y_C = \frac{9 P a^3}{2 EI}$$

6.9. Pentru grinda din figură se cere să se determine săgeata şi rotirea în punctele A şi B cu ajutorul metodei grinzilor conjugate. Grinda se va executa dintr-un profil I.

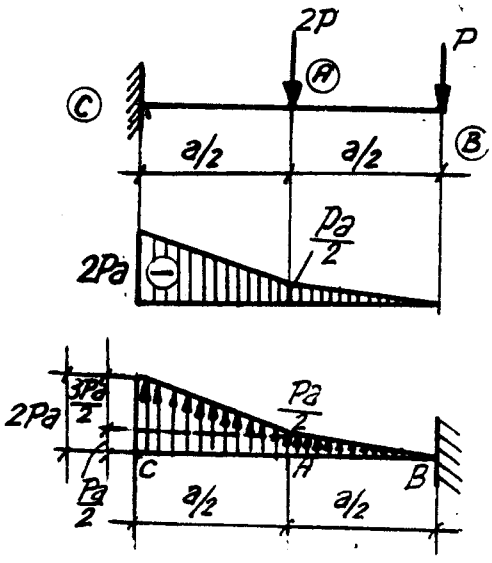


Fig. 234

Ca exemplu numeric se vor considera :

a = 1,o m

P = 1 T

Curba momentelor încovoietoare este după cum se vede în figură.

Grinda conjugată care va avea capăt liber în C si încastrare în B, va fi încărcată cu curba de momente încovoietoare considerată drept sarcină.

Forţa tăietoare în secţiunile A şi B ale grinzii conjugate rezultată din încărcarea cu diagrama de moment încovoietor va fi :

$$T_A = + \frac{3\,Pa}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{P\,a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3\,Pa^2}{2} + \frac{P\,a^2}{4} + \frac{5\,P\,a^2}{8}$$

$$T_B = \frac{5\,Pa^2}{8} + \frac{P\,a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = + \frac{3\,Pa^2}{4}$$

Momentul încovoietor în secţiunile A şi B ale grinzii conjugate vor fi :

$$M_A = + \frac{3\,P\,a^2}{8} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{a}{2} + \frac{P\,a^2}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{P\,a^3}{8} + \frac{P\,a^3}{16} = \frac{3\,P\,a^3}{16}$$

$$M_B = \frac{3\,P\,a^2}{8}\left(\frac{2}{3}\,\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) + \frac{P\,a^2}{4} \cdot \left(\frac{a}{4} + \frac{a}{2}\right) + \frac{P\,a^2}{8} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{a}{2} =$$

$$= \frac{15\,Pa^3}{48} + \frac{3\,P\,a^3}{16} + \frac{P\,a^3}{24} = \frac{26\,P\,a^3}{48} = \frac{13\,P\,a^3}{24}$$

Expresiile rotirilor şi săgeţilor în punctele A şi B vor fi :

$$y'_A = \frac{T_A}{EI} = \frac{5\,P\,a^2}{8\,EI}$$

$$y'_B = \frac{T_B}{EI} = \frac{3\,P\,a^2}{4\,EI}$$

$$y_A = \frac{M_A}{EI} = \frac{3\,P\,a^3}{16\,EI}$$

$$y_B = \frac{M_B}{EI} = \frac{13\,P\,a^3}{24\,EI}$$

Pentru a calcula numeric valorile rotirilor şi săgeţilor trebuie dimensionată grinda la încovoiere.

$$M_{max} = 2\,P\,a = 2\,T_m$$

$W_{nec} = \frac{200\,000}{1400} = 143\ cm^3$ Alegem un profil I 18

$W_{ef} = 161\ cm^3$ şi

$I_{ef} = 1450\ cm^4$

Verificare

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{200\,000}{161} = 1240\ kg/cm^2 < 1400\ kg/cm^2$$

$$\varphi_A = y'_A = \frac{5 \times 1000 \times 100^2}{8 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 1450} = 0{,}00205\ rad \rightarrow \varphi_A = 7{,}05'$$

$$\varphi_B = y'_B = \frac{3 \times 1000 \times 100^2}{4 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 1450} = 0{,}00244\ rad \rightarrow \varphi_B = 8{,}4'$$

$$y_A = \frac{5 \times 1000 \times 100^6}{16 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 1450} = 0{,}0617\ cm$$

$$y_B = \frac{15 \times 1000 \times 100^6}{24 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 1450} = 0{,}178\ cm$$

6.10. Se cere să se calculeze expresia săgeţii şi a rotirii în punctul B al grinzii alăturate folosind metoda grinzilor conjugate.

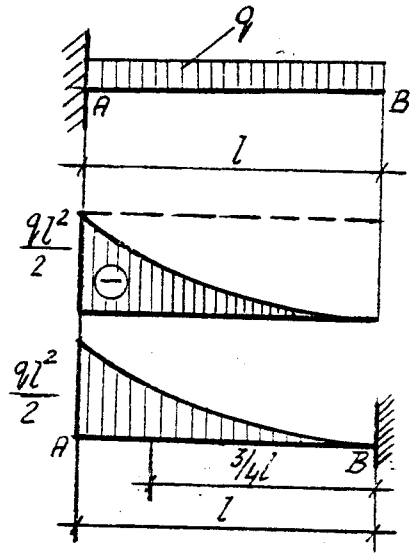


Fig. 235

Se construieşte diagrama momentelor încovoietoare şi se încarcă cu ea grinda conjugată.

Calculînd apoi forţa tăietoare şi momentul încovoietor în punctul B de pe grinda conjugată şi împărţind valorile lor la rigiditate (EI) vor rezulta valorile rotirii şi respectiv săgeţii din punctul B.

$$T_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{q\,l^2}{2} \cdot l = \frac{q\,l^3}{6}$$

$$M_B = \frac{q\,l^3}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot l = \frac{q\,l^4}{8}$$

$$\varphi_B = y'_B = \frac{T_B}{EI} = \frac{q\,l^3}{6\,EI}$$

$$y_B = \frac{M_B}{EI} = \frac{q\,l^4}{8\,EI}$$

6.11. Se dă grinda din figură. Se cere să se calculeze săgeata şi rotirea în punctul B aplicînd metoda grinzilor conjugate .

Se va determina în primul rînd diagrama momentului încovoietor şi grinda conjugată.

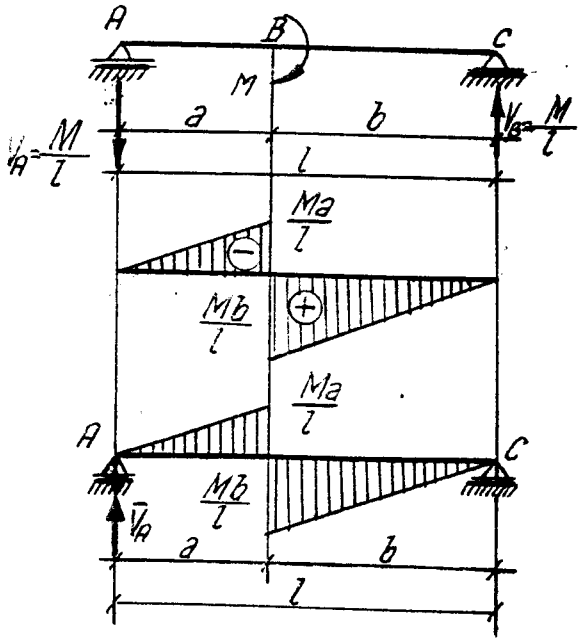


Fig. 236

Grinda conjugata (în cazul nostru tot o grindă simplu rezemată) se va încarca cu diagrama de momente încovoietoare considerată drept sarcină.

Reacţiunea $\overline{V}_A$ a grinzii conjugate va fi urmatoarea :

$$\overline{V}_A = \frac{\frac{M}{l}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{2}{3}b - \frac{M}{l}\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{a}{3}+b\right)}{l} =$$

$$= \frac{M\,(2b^3 - a^3 - 3a^2 b)}{6\,l^2}$$

Pentru a calcula expresia săgeţii şi a rotirii în punctul B va trebui să determinăm forţa tăietoare şi momentul încovoietor al grinzii conjugate în punctul B.

$$\overline{T}_B = \frac{M}{6l^2}(2b^3 - a^3 - 3a^3 b) + \frac{Ma}{l}\cdot\frac{a}{2} = \frac{M}{6l^2}\left[2b^3 - a^3 - 3a^2 b + 3a^2(a+b)\right] =$$

$$= \frac{M}{3l^2}(a^3 + b^3)$$

$$\overline{M}_B = \frac{Ma}{6l^2}(2b^3 - a^3 - 3a^2 b) + \frac{Ma^2}{2l}\cdot\frac{a}{3} = \frac{Ma}{6l^2}(2b^3 - a^3 - 3a^2 b + a^2 b$$

$$= \frac{Ma}{6l^2}(2b^3 - 2a^2) = \frac{Mab}{6l}(b - a)$$

$$\varphi_B = \frac{\overline{T}_B}{EI} = \frac{M}{3l^2 EI}(a^3 + b^3)$$

$$y_B = \frac{\overline{M}_B}{EI} = \frac{Mab}{6lEI}(b - a)$$

P.12. Se dă grinda din figură; se cere expresia săgeţii în punctul B (la mijlocul grinzii) cu ajutorul metodei grinzilor conjugate.

Se va trasa curba de momente încovoietoare. Vom încărca apoi grinda conjugată cu două diagrame de momente - suprapunîndu-le efectele şi însumînd rezultatele obţinem :

$$\overline{V}'_A = \frac{q\,l^3}{8}$$

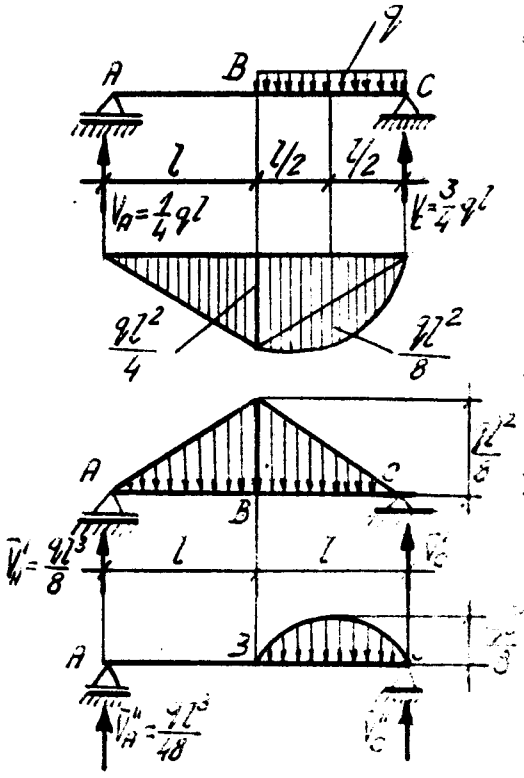


Fig. 237

$$\overline{V_A''} = \frac{\frac{2}{3}\frac{q l^2}{8}\cdot l\cdot\frac{1}{2}}{2\ l} = \frac{q l^3}{48}$$

$$\overline{V_A} = \overline{V_A'} + \overline{V_A''} = \frac{q l^3}{8} + \frac{q l^3}{48} = \frac{7\,q l^3}{48}$$

Forța tăietoare și momentul încovoietor în punctul B pe grinda conjugată vor fi :

$$\overline{T_B} = \frac{7\,q l^3}{48} - \left(\frac{1}{2}\,q\,\frac{l^2}{4}\right) = \frac{q l^3}{48}$$

$$\overline{M_B} = \frac{7\,q l^3}{48}\cdot l - \frac{q l^3}{3}\cdot\frac{1}{5}\,l$$

$$\overline{M_B} = \frac{7\,q l^4}{48} - \frac{q l^4}{24} = \frac{5\,q l^4}{48}$$

Rotirea și săgeata în punctul B sînt date de expresiile :

$$\varphi_B = y'_B = \frac{\overline{T_B}}{EI} = \frac{q l^3}{48\,EI}$$

$$y_B = \frac{\overline{M_B}}{EI} = \frac{5\,q l^4}{48\,EI}$$

6.13. Se dă grinda din figură. Se cere expresia rotirii și săgeții în punctele B și D folosind metoda grinzilor conjugate.

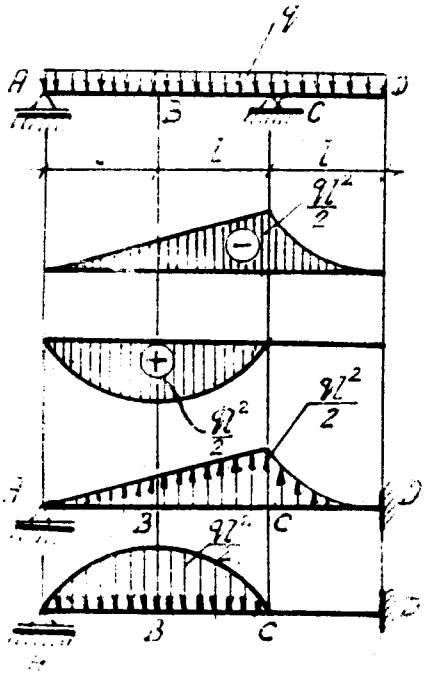


Fig. 238

Determinăm diagramele de momente încovoietoare. Apoi vom încărca grinda conjugată cu cele două diagrame de momente încovoietoare și vom suprapune efectele.

$$\overline{V_A'} = \frac{1}{3}\cdot\frac{q l^2}{2}\cdot\frac{2\,l}{2}\cdot\frac{2\,l^3}{3}$$

$$\overline{V_C'} = \frac{2}{3}\cdot\frac{q l^2}{2}\cdot\frac{2}{2}\frac{l}{2} = \frac{q l^3}{3}$$

$$\overline{V_C''} = \overline{V_C''} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,q\,\frac{l^2}{2}\cdot 2l = \frac{q l^3}{3}$$

$$\overline{T_B} = \overline{T_B'} + \overline{T_B''}$$

$$\overline{T_B'} = -\frac{q l^3}{6} + \frac{q\cdot l^2}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{q l^3}{24}$$

$$\overline{T_B''} = +\frac{q l^3}{3} - \frac{2}{3}\,q\,\frac{l^2}{2}\cdot l =$$

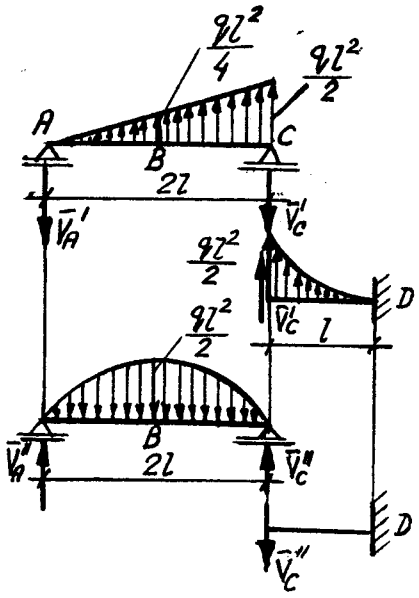


Fig. 239

$$\overline{T_D} = \overline{T_D'} + \overline{T_D''} = \frac{q\,l^3}{2} - \frac{q\,l^3}{3} = \frac{q\,l^3}{6}$$

$$\overline{T_D'} = +\frac{q\,l^3}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{q\,l^2}{2}\cdot l = \frac{q\,l^3}{2}$$

$$\overline{T_D''} = -\frac{q\,l^3}{3}$$

$$\overline{M_B} = \overline{M_B'} + \overline{M_B''} = -\frac{q\,l^4}{8} + \frac{5\,q\,l^4}{24} = \frac{q\,l^4}{12}$$

$$\overline{M_B'} = -\frac{q\,l^3}{6}\cdot l + \frac{q\,l^3}{8}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{q\,l^4}{8}$$

$$\overline{M_B''} = \frac{q\,l^3}{3}\cdot l - \frac{q\,l^3}{3}\cdot\frac{3}{8}\,l = \frac{5\,q\,l^4}{4}$$

$$\overline{M_D} = \overline{M_D'} + \overline{M_D''} = +\frac{11\,q\,l^4}{24} - \frac{q\,l^4}{3} = \frac{q\,l^4}{8}$$

$$\overline{M_D'} = \frac{q\,l^3}{3}\cdot l + \frac{q\,l^3}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot l = \frac{11\,q\,l^4}{24}$$

$$\overline{M_D''} = -\frac{q\,l^3}{3}\cdot l = -\frac{q\,l^4}{3}$$

$$\varphi_B = y_B' = \frac{\overline{T_B}}{EI} = -\frac{q\,l^3}{24\,EI}$$

$$\varphi_D = y_D' = \frac{\overline{T_D}}{EI} = \frac{q\,l^3}{6\,EI}$$

$$y_B = \frac{\overline{M_B}}{EI} = \frac{q\,l^4}{12\,EI}$$

$$y_D = \frac{\overline{M_D}}{EI} = \frac{q\,l^4}{8\,EI}$$

6.14. Se dă grinda static nedeterminată din figură. Se cere să se traseze diagramele T şi M, să se dimensioneze grinda dintr-un profil I şi să se calculeze deplasarea maximă. Se va aplica metoda parametrilor iniţiali (metoda Krîlov).

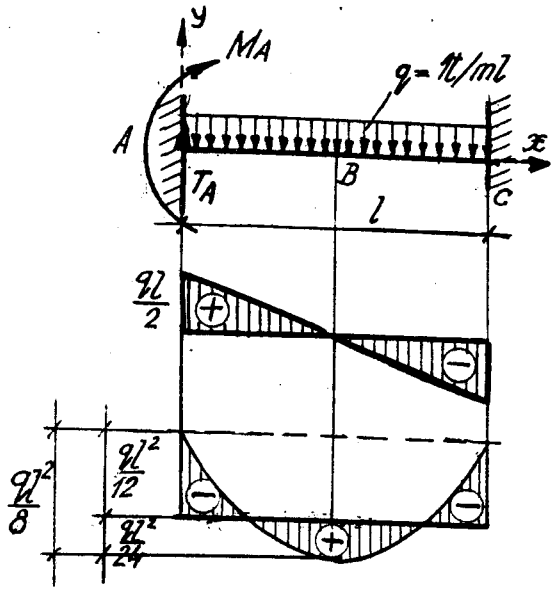


Fig. 240

Considerînd originea în punctul A; parametrii iniţiali în număr de patru y_A, φ_A, M_A, T_A se va reduce la doi, y_A şi φ_A fiind nuli în încastrare.

Expresiile deformaţiei după metoda Krîlov, sînt :

$$EIy' = EI\varphi_A + M_A\frac{x}{1!} + \frac{T_A x^2}{2!} - \phi'(x)$$

$$EIy = EIy_A + EI\varphi_A\frac{x}{1} + \frac{M_A x^2}{2} + \frac{T_A x^3}{3} - \phi(x)$$

Expresiile $\phi' x$ şi ϕx au o formă asemanatoare cu termeni din expresiile corespunzatoare depinzînd de forţele exterioare aplicate pe grindă.

In cazul nostru aceste doua expresii se pot scrie :

$$EIy' = \frac{M_A x}{1!} + \frac{T_A x^2}{2!} - \frac{q x^3}{3!}$$

$$EIy = \frac{M_A x^2}{2!} + \frac{T_A x^3}{3!} - \frac{q x^4}{4!}$$

Ceilalţi doi parametri iniţiali M_A şi T_A se determina punînd condiţia ca rotirea şi săgeata în punctul C să fie nule.

Deci pentru $x = l$ $\begin{cases} \varphi_c = 0 \\ y_c = 0 \end{cases}$

$$M_A l + \frac{T_A l^2}{2} - \frac{q l^3}{6} = 0$$

$$\frac{M_A l^2}{2} + \frac{T_A l^3}{6} - \frac{q l^4}{24} = 0$$

De aici rezulta $T_A = \frac{q l}{2}$

$$M_A = -\frac{q l^2}{12}$$

Expresia deplasarii maxime este :

$$EIy_{max} = -\frac{q l^2}{12}\cdot\frac{(\frac{l}{2})^2}{2} + \frac{q l}{2}\cdot\frac{(\frac{l}{2})^3}{6} - \frac{q(\frac{l}{2})^4}{24}$$

$$EIy_{max} = -\frac{q l^4}{96} + \frac{q l^4}{96} - \frac{q l^4}{384} = -\frac{q l^4}{384}$$

$$y_{max} = \frac{q l^4}{384 EI}$$

Deci în acest caz deplasarea maxima este mai mică de 5 ori decît la o grinda simplu rezemata, încarcata cu aceeaş sarcina.

Dimensionarea

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{300\,000}{\quad} = 213{,}0$$

unde momentul încovoietor maxim este :

$$M_{max} = \frac{q\,l^2}{12} = \frac{1 \times 6^2}{12} = 3\ T_m$$

Alegem un profil I 20 avînd $W_x = 214\ cm^3$

Verificare : $\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_{ox}} = \frac{300\,000}{214} = 1400\ kg/cm^2$

Numeric deplasarea maximă are valoarea :

$$y_{max} = \frac{10 \times 600^4}{384 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 2140} = 0{,}764\ cm$$

6.15. Se da diagrama din figura (static nedeterminată de 2 ori).

Se cere diagrama de momente încovoietoare şi forţa tăietoare precum şi săgeata în punctul B, calculîndu-se cu metoda parametrilor iniţiali.

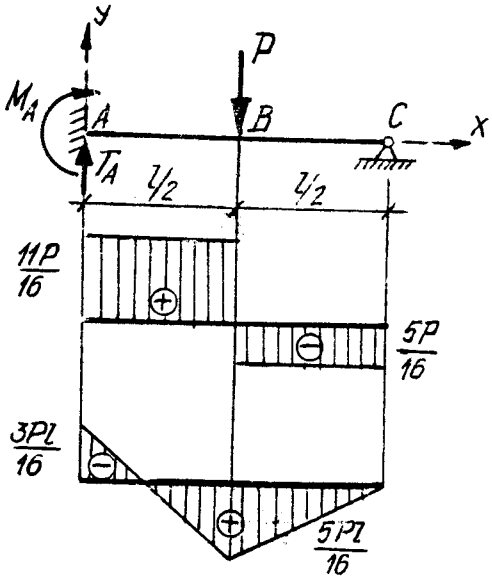


Fig. 241

Deformata după metoda parametrilor iniţiali se scrie în mod general :

(1) $EIy' = EI\varphi_A + \frac{M_A \cdot x}{1!} + \frac{T_A x^2}{2!} - \phi'(x)$

(2) $EIy = EIy_A + EI\varphi_A \frac{x}{1!} + \frac{M_A \cdot x^2}{2!} + \frac{T_A \cdot x^3}{3!} - \phi(x)$

Din condiţiile iniţiale puse în punctul A rezultă că y_A şi φ_A sînt nule, iar în C momentul şi sageata sînt nule.

Deci:

$$\frac{M_A \cdot l^2}{2} + \frac{T_A l^3}{6} - \frac{P_0 l^3}{48} = 0$$ (sageata în C este nulă)

Rezultă necunoscutele T_A şi M_A:

$$T_A = \frac{11}{16} = P$$

$$M_A = -\frac{3}{16} P\,l$$

$$M_B = -\frac{3}{16} P\,l + \frac{11}{16} \cdot \frac{P\,l}{2} = +\frac{5\,P\,l}{16}$$

Săgeata în punctul B se calculează înlocuind valorile lui T_A şi M_A în ecuaţia 2 precum şi pe $x = \frac{l}{2}$

$$EIy_B = -\frac{3}{16} Pl \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{11}{16} P \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3!} = -\frac{3\,Pl^3}{16x8} + \frac{11\,Pl^3}{16x48} = -\frac{7\,Pl^3}{16x48}$$

$y_B = -\frac{7\,P\,l^3}{768\,EI}$ (deci aproximativ de 2 ori mai mică decît în cazul unei grinzi simplu rezemate)

6.16. Se dă grinda dublu încastrată din figură. Să se calculeze cu metoda Krîlov, ce eforturi iau naştere în lungul grinţii (T şi M) dacă reazemul suferă o tasare Δ_o.

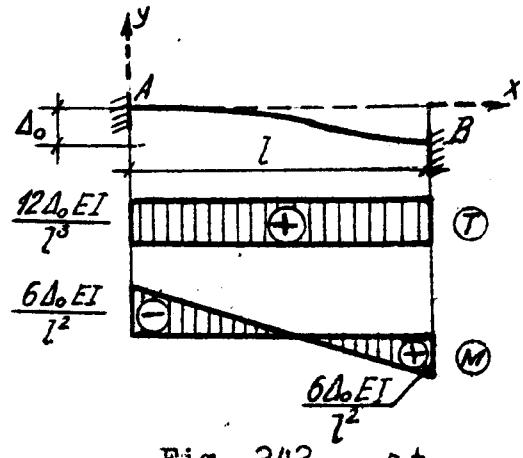


Fig. 242

Exemplu numeric pentru o grindă alcătuită dintr-un profil I 30 avînd $l = 4{,}50$ m şi $\Delta_o = 0{,}5$ m.

Ecuaţiile deformatei după Krîlov sînt :

$$(1)\quad EIy' = \varphi_A + M_A\frac{x}{1} + \frac{T_A x^2}{2!} - \phi'(x)$$

$$(2)\quad EIy = y_A + \varphi_A\frac{x}{1} + \frac{M_A x^2}{2!} + \frac{T_A x^3}{3!} - \phi(x)$$

unde $\phi'(x)$ şi $\phi(x)$ sînt factori de încărcare provenind din sarcini exterioare.

Pentru determinarea celor 4 parametri iniţiali vom pune 4 condiţii, 2 în încastrarea din stînga şi două în încastrarea din B şi anume :

- pentru $x = o \longrightarrow y_A = o$ şi $\varphi_A = o$
- pentru $x = o \longrightarrow y_B = -\Delta_o$ şi $\varphi_B = o$

$\phi'_x = o$ deasemenea $\phi_x = o$ deoarece încărcarea exterioară lipseşte.

Expresiile devin :

$$M_A l + \frac{T_A l^2}{2} = o$$

$$\frac{M_A l^2}{2} + \frac{T_A l^3}{6} = -\Delta_o EI$$

Reducîndu-le obţinem

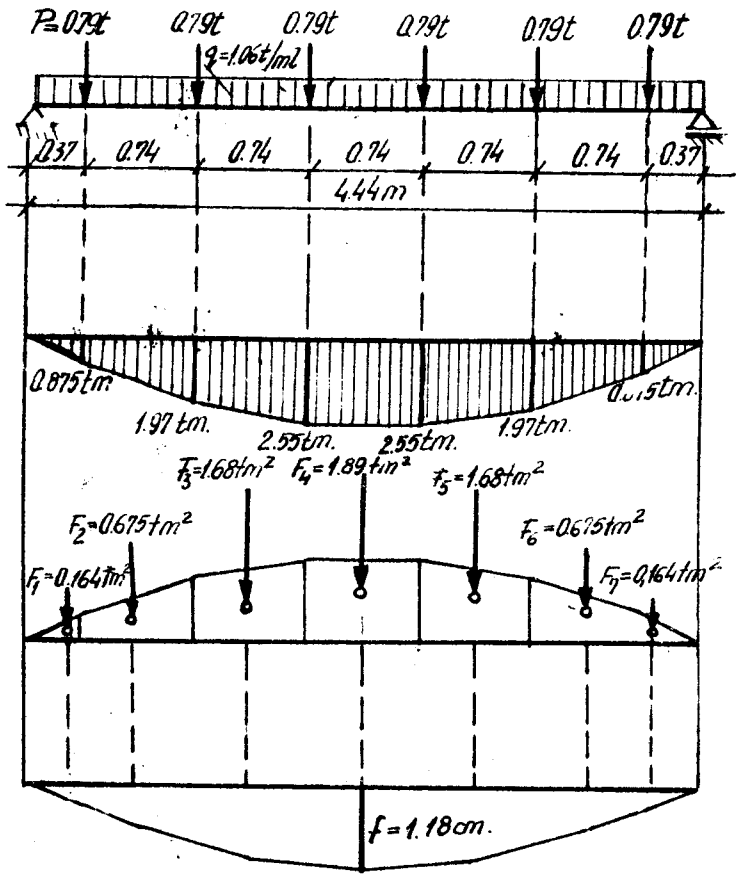
$$T_A = \frac{12\ \Delta_o EI}{l^3}$$

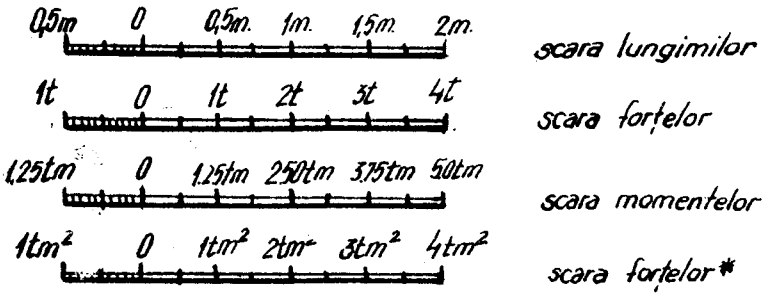
$$M_A = -\frac{6\ \Delta_o EI}{l^2}$$

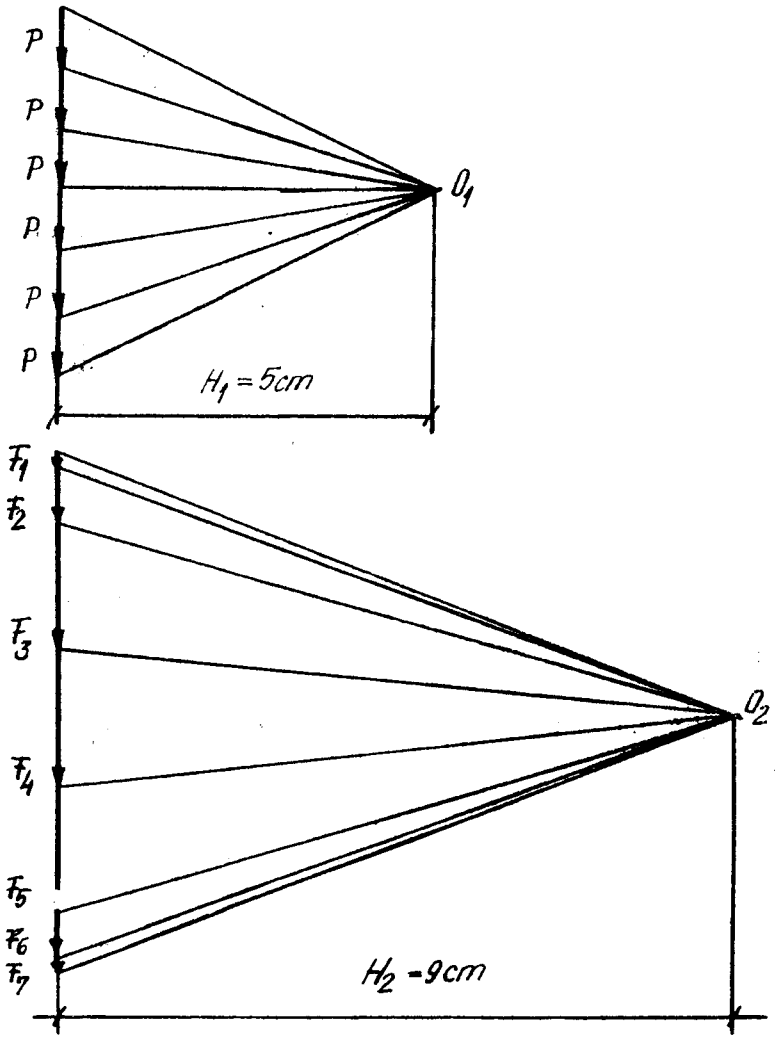
Numeric :

$$T_A = \frac{12 \times 0{,}5 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 9800}{450^3} = 1370\ \text{kg} \qquad M_A = 3060\ \text{Kgm.}$$

6.17. Se dă grinda rezemată din figură, executată dintr-un profil I, încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Se cere să se traseze deformata grinzii la scară naturală, aplicînd metoda grafică şi apoi să se verifice deplasarea maximă cu metoda analitică


P=0.79t
0.79t
0.79t
0.79t
0.79t
0.79t
q=1.06t/ml
0.37
0.74
0.74
0.74
0.74
0.74
0.37
4.44m
0.875tm
1.97tm.
2.55tm.
2.55tm.
1.97tm.
0.875tm.
F1=0.164tm2
F2=0.675tm2
F3=1.68tm2
F4=1.89tm2
F5=1.68tm2
F6=0.675tm2
F7=0.164tm2
f=1.18cm.


0,5m 0 0,5m. 1m. 1,5m. 2m.
scara lungimilor
1t 0 1t 2t 3t 4t
scara forțelor
1,25tm 0 1,25tm 2,50tm 3,75tm 5,0tm
scara momentelor
1tm2 0 1tm2 2tm2 3tm2 4tm2
scara forțelor*


P
P
P
P
P
P
O1
H1 = 5cm
F1
F2
F3
F4
F5
F6
F7
O2
H2 = 9cm

Vom dimensiona grinda dintr-un profil I, astfel încît să rezistete la încovoiere:

$$M_{max} = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{1{,}06 \times 4{,}44^2}{8} = 2{,}61 \quad Tm$$

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{261000}{1400} = 186{,}5 \ cm^2$$

Alegem I 20 având modelul de rezistenţă efectiv W_{ef} = =214 cm^3 şi momentul de inerţie I_{ef} = 2140 cm^4

Verificarea arată că secţiunea a fost judicios aleasă:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} = \frac{261\,000}{214} = 1220 \ kg/cm^2$$

Ne prepunem următoarele scări :

scara lungimilor : $\frac{1}{50}$ deci 1 cm pe desen = 50 cm din realitate.

scara forţelor . . . . . 1 cm pe desen = 1 tonă din realitate.

Împărţim sarcina uniform distribuită într-un număr de 6 părţi, înlocuindu-le apoi cu forţe concentrate.

Construim poligonul forţelor cu o distanţă polară H_1 = 5 cm şi apoi trasăm poligonul funicular. Momentele încovoietoare se vor măsura la scara momentelor (1 cm = 1,25 T_m, distanţa polară fiind 5 cm) sau se pot calcula analitic.

Luînd apoi ca sarcină diagrama de momente încovoietoare şi aproximînd aceste sarcini fictive distribuite cu forţe concentrate măsurate la o anumită scară pe care am ales-o (1 cm = = 1 Tm^2) vom trasa poligonul acestor forţe fictive şi apoi curba lor funiculară. Aceasta din urmă reprezintă chiar deformaţia grinzii. Pentru a avea deformaţiile la scara naturală vom alege distanţa polară a acestor forţe fictive egală cu :

$$H = \frac{EI}{a.b.}$$

unde :

EI reprezintă rigiditatea grinzii la încovoiere

a este scara lungimilor

iar b este scara forţelor fictive

In cazul nostru :

$$H = \frac{2{,}1 \times 10^6 \times 2140}{20 \times 10.000.000} = 9 \ cm$$

Calculînd analitic săgeata maximă a grinzii constatăm că este egală cu :

$$f = \frac{5\,q\,l^4}{384\,EI} = \frac{5 \times 10{,}^6 \times 4{,}44^4 \times 10^8}{384 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 2140} = 1{,}19 \ cm$$

Din epură a reeşit f = 1,18 cm, deci eroarea este sub 1% - neglijabilă.

6.lo. Să se calculeze cu metoda parametrilor iniţiali deplasarea maximă a grinzii dublu încastrate din figură, încărcată cu sarcină distribuită care variază parabolic.

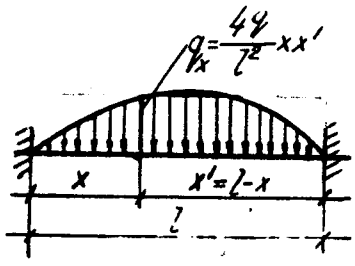


Fig. 244

Ecuaţia diferenţiată a fibrei medii deformate se poate scrie :

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = - (q)\ x$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = o \text{ este :}$$

$$EIy = C_1 \frac{x^4}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x}{1!} + C_4 \text{ unde}$$

$$C_4 = EIy_o$$

$$C_3 = EI\,\varphi_o = EIy'_o$$

$$C_2 = M_o = EIy''_o$$

$$C_1 = T_o = EIy'''_o$$

Soluţia particulară a ecuaţiei după regula lui Cauchy este de forma următoare :

$$EIy = - \phi(x) = - \frac{1}{3!} \int_o^x (x - t)^3\ q\ (t)\ dt$$

Derivatele acestei funcţii vor fi de forma :

$$\phi'(x) = \frac{1}{2!} \int_o^x (x-t)^2\ q\ (t)\ dt$$

$$\phi''(x) = \int_o^x (x-t)\ q\ (t)\ dt$$

$$\phi'''(x) = \int_o^x q\ (t)\ dt$$

$$\phi^{IV}(x) = q\ (x)$$

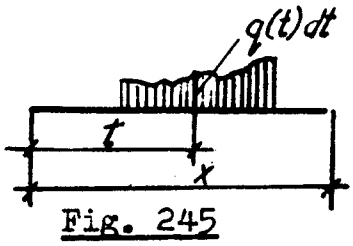


Fig. 245

In concluzie deci ecuaţia generală a axei deformate are forma :

$$EIy = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x}{1!} + C_4 - \phi(x)$$

Expresia rotirii într-o secţiune va fi :

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\,\varphi = C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 \frac{x}{1!} + C_3 - \phi'(x)$$

Va trebui să determinăm funcţia încărcării $\phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 q(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^x x^3 \frac{4q}{l^2}x(l-x)dx = \frac{2q}{3l^2}\left[\frac{x^5}{5}l - \frac{x^6}{6}\right]$$

iar

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 q(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x x^2 \frac{4q}{l^2}x\,(l-x)dx = \frac{2q}{l^2}\left[\frac{x^4}{4}l - \frac{x^5}{5}\right]$$

Pentru determinarea constantelor C_1 , C_2 , C_3, C_4 vor trebui 4 condiţii pe reazeme şi anume :

pentru : $x = o \longrightarrow y = o$ şi

$$\frac{dy}{dx} = o$$

pentru : $x = l \longrightarrow y = o$ şi

$$\frac{dy}{dx} = o$$

Din primele două condiţii rezultă $C_3 = C_4 = o$

Deci ecuaţiile deplasării şi rotirii devin :

$$EIy = C_1\frac{x^3}{3!} + C_2\frac{x^2}{2!} - \frac{2q}{3\,l^2}\left[\frac{x^5}{5}l - \frac{x^6}{6}\right]$$

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\varphi = C_1\frac{x^2}{2!} + C_2\frac{x}{1!} - \frac{2q}{l^2}\left[\frac{x^4}{4}l - \frac{x^5}{5}\right]$$

Punînd celelalte două condiţii obţinem :

$$C_1\frac{l^3}{6} + C_2\frac{l^2}{2} - \frac{2q}{3\,l^2}\cdot\frac{l^6}{30} = o$$

$$C_1\frac{l^2}{2} + C_2 l - \frac{2q}{l^2}\cdot\frac{l^5}{20} = o$$

De unde rezultă valorile constantelor C_1 şi C_2

$$C_1 = \frac{q\,l}{3} \text{ şi } C_2 = -\frac{1}{15}\,q\,l^2$$

Expresia deplasării maxime se va obţine pentru valoarea $x = \frac{l}{2}$

$$EIy_{max} = \frac{ql}{3}\cdot\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3!} - \frac{1}{15}ql^2\left(\frac{\frac{l}{2}}{2}\right)^2 - \frac{2q}{3l^2}\left[\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^6}{6}\right] = -\frac{107}{2880}\,q\,l^4$$

adică

$$y_{max} = -\frac{107\,q\,l^4}{2880\,EI}$$

6.19. Se dă grinda din figură.

Se cere să se calculeze deplasarea verticală şi rotirea în punctul C aplicînd teorema lui Castigliano.

Expresia generală a deplasării este :

$$EI\,y = \int_L M_x\frac{\partial M_x}{\partial P}\,dx$$

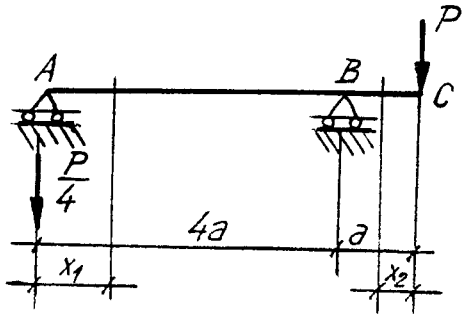


Fig. 246

În cazul nostru există două zone de variaţie a momentului încovoietor, rezultă deci :

$$EIy_C = \int_0^{4a} M_{x_1} \frac{\partial M_{x_1}}{\partial P} dx_1 + \int_0^{a} M_{x_2} \frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} dx_2$$

unde :

$$M_{x_1} = -\frac{P}{4} x_1$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial P} = -\frac{x_1}{4}$$

$$M_{x_2} = -P x_2$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} = -x_2$$

$$EI_{y_C} = \int_0^{4a} \left(-\frac{P}{4} x_1\right)\left(-\frac{x_1}{4}\right) dx_1 + \int_0^{a} (-P x_2)(-x_2)\, dx_2 =$$

$$= \frac{P}{16} \frac{x_1^3}{3} \cdot \Big|_0^{4a} + P \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^{a} = \frac{4 P a^3}{3} + \frac{P a^3}{3} = \frac{5 P a^3}{3}$$

sau

$$y_C = \frac{5 P a^3}{3 EI}$$

Pentru calculul rotirii în punctul C trebuie să aplicăm un moment M_G virtual în punctul C care-l vom anula apoi în expresia rotirii.

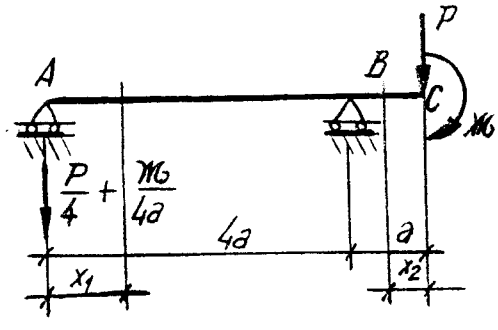


Fig. 247

Expresia generală a rotirii este :

$$EI\varphi = \int_L M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_G} dx$$ iar în cazul nostru va fi:

$$EI\varphi_C = \int_0^{4a} M_{x_1} \frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_G} dx + \int_0^{a} M_{x_2} \frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_G} dx$$ unde :

$$M_{x_1} = -\frac{P}{4} x_1 - \frac{M_G}{4a} x_1$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_6} = -\frac{x_1}{4a}$$

$$M_{x_2} = -Px_2 - M_6$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_6} = -1$$

Inlocuind în expresia rotirii şi anulînd momentul M_6 pe care l-am aplicat în punctul C (de care am avut nevoie la calculul rotirii), rezultă :

$$EI\,\varphi_C = \int_0^{4a} \left(-\frac{P}{4}x_1\right)\left(-\frac{x_1}{4a}\right) dx_1 + \int_0^{a} (-Px_2)(-1)\,dx_2$$

$$EI\,\varphi_C = \frac{P}{16a}\,\frac{x_1^3}{3}\Big|_0^{4a} + P\,\frac{x_2^2}{2}\Big|_0^{a} = \frac{4\,P\,a^2}{3} + \frac{P\,a^2}{2} = \frac{11\,P\,a^2}{6}$$

sau

$$\varphi_C = \frac{11\,P\,a^2}{6\,EI}$$

6.20. Să se calculeze expresia deplasării verticale în punctul A a grinzii cotite din figură cu ajutorul teoremei lui Castigliano.

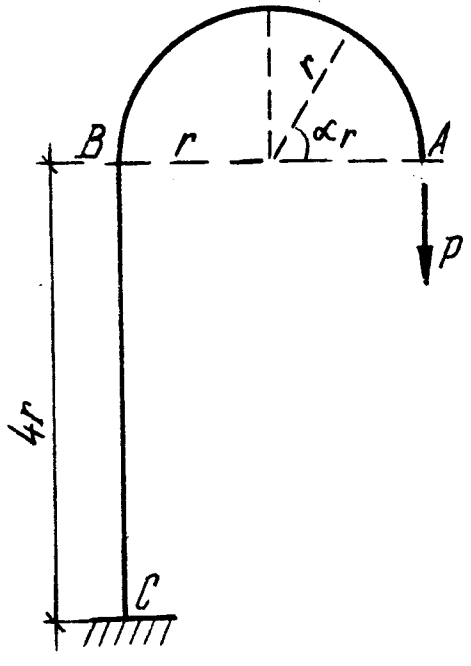


Fig. 248

$$EIy = \int_L \frac{M_x\,\partial M_x}{\partial P}\,dx$$

Vor exista două zone de variaţie a momentului încovoietor de la A la B şi de la B la C.

Zona A - B

$$M_x = -P(r - r\cos\alpha) = -Pr(1-\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -r\,(1-\cos\alpha)\,dx = rd\alpha$$

Zona B - C

$$M_x = -2\,P\,r$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -2\,r$$

Deci expresia deplasării în A va fi următoarea :

$$EIy_A = \int_0^{\pi} -\left[Pr(1-\cos\alpha)\right]\left[-r(1-\cos\alpha)\right] rd\alpha + \int_0^{4r} (-2P)(-2r)\,dx$$

$$EIy_a = P r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\alpha)\, d\alpha + 16 P r^3 = P r^3 \left(16 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

deci :

$$y_a = \frac{P r^3 \left(16 + \frac{3\pi}{2}\right)}{EI}$$

6.21. Se dă grinda cotită din figură .

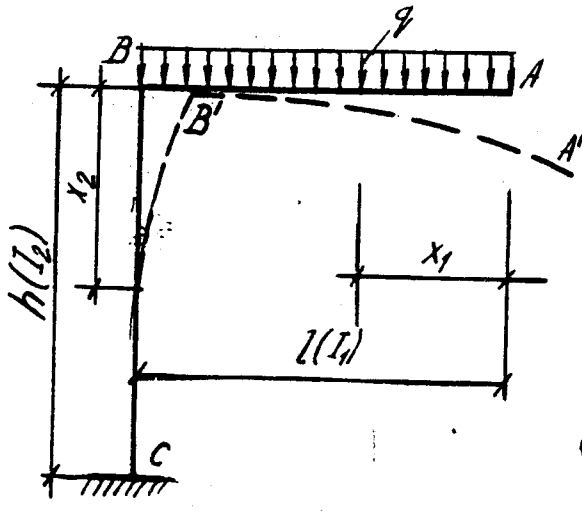


Fig. 249

Se cere deplasarea verticală y, deplasarea orizontală x precum şi rotirea φ în punctul A aplicînd teorema lui Castigliano. Intrucît în punctul A nu acţionează o forţă orizontală sau verticală şi nici moment, înseamnă că trebuie introduse nişte forţe fictive X_A, Y_A şi M_G necesare aplicării teoremei lui Castigliano.

Pentru calculul deplasării verticale în punctul A vom aplica o forţă fictivă y_A după direcţia deplasării cerute.

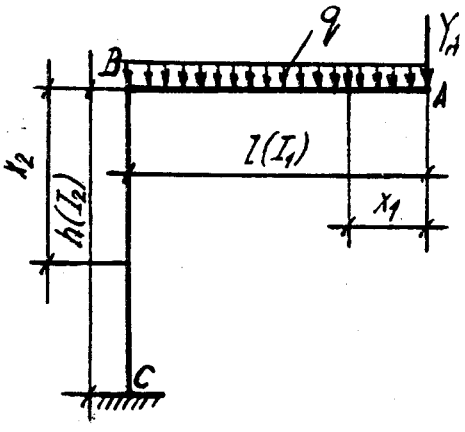


Fig. 250

Expresia deplasării verticale este :

$$y_A = \int_0^l \frac{M_{x_1}}{EI_1} \frac{\partial M_{x_1}}{\partial Y_A} dx_1 + \int_0^h \frac{M_{x_2}}{EI_2} \cdot \frac{\partial M_{x_2}}{\partial Y_A} dx_2$$

unde :

$$M_{x_1} = - y_A \cdot x_1 - \frac{q x_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial y_A} = - x_1$$

$$M_{x_2} = - y_A \cdot l - \frac{q l^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial y_A} = - l$$

atunci :

$$y_A = \frac{1}{EI_1} \int_0^l \frac{(- q x_1^2)}{2} (-x_1) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^h \left(- \frac{q l^2}{2}\right)(-l)\, dx_2$$

$$y_A = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{q x_1^4}{8} \Big|_0^l + \frac{1}{EI_2} \frac{q l^3 x_2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{EI_1} \frac{q l^4}{8} + \frac{1}{EI_2} \frac{q l^3 h}{2}$$

Expresia deplasării orizontale este :

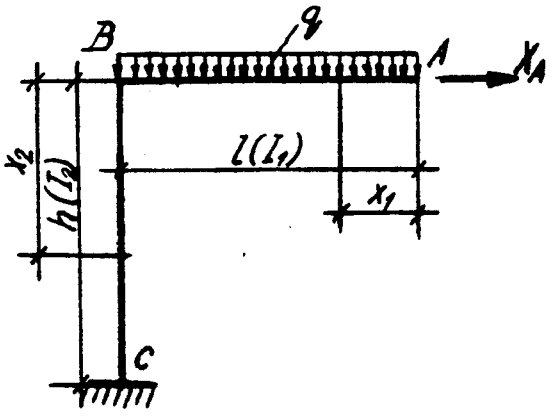


Fig. 251

$$x_A = \int_0^l \frac{M_{x_1}}{EI_1} \cdot \frac{\partial M_{x_1}}{\partial x_A} dx_1 + \int_0^h \frac{M_{x_2}}{EI_2} \cdot \frac{\partial M_{x_2}}{\partial x_A} dx_2$$ unde

$$M_{x_1} = -\frac{q x_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x_A} = 0$$

$$M_{x_2} = -\frac{q l^2}{2} - x_A \cdot x_2$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial x_A} = -x_2$$

$$X_A = \frac{1}{EI_2} \int_0^h (-\frac{q l^2}{2})(-x_2) dx_2 = \frac{q l^2}{EI_2^4} \cdot x_2^2 \Big|_0^h = \frac{q l^2 h^2}{4 EI_2}$$

Rotirea în punctul A se calculează cu relaţia :

$$\varphi_A = \frac{1}{EI_1} \int_0^l M_{x_1} \frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_6} dx_1 + \frac{1}{EI_2} \int_0^h M_{x_2} \frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_6} dx_2$$

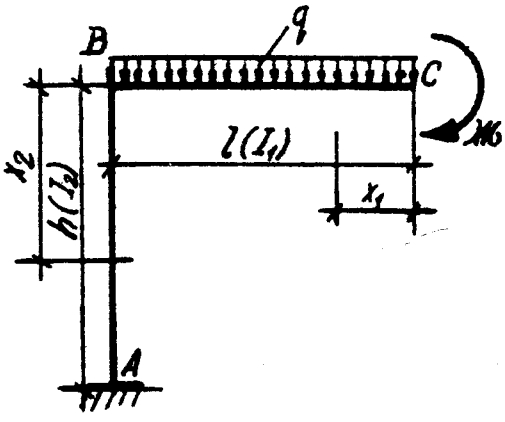


Fig. 252

$$M_{x_1} = -\frac{q x_1^2}{2} - M_6 \qquad \frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_6} = -1$$

$$M_{x_2} = -\frac{q l^2}{2} - M_6 \qquad \frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_6} = -1$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EI_1} \int_0^l (-\frac{q x_1^2}{2})(-1) dx_1 + \frac{1}{EI_2} \int_0^h (-\frac{q l^2}{2})(-1) dx_2$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EI_1}\frac{q}{2}\frac{x_1^3}{3}\Big|_0^l + \frac{1}{EI_2}\frac{ql^2}{2}x_2\Big|_0^h = \frac{1}{EI_1}\frac{ql^3}{6} + \frac{1}{EI_2}\frac{ql^2h}{2}$$

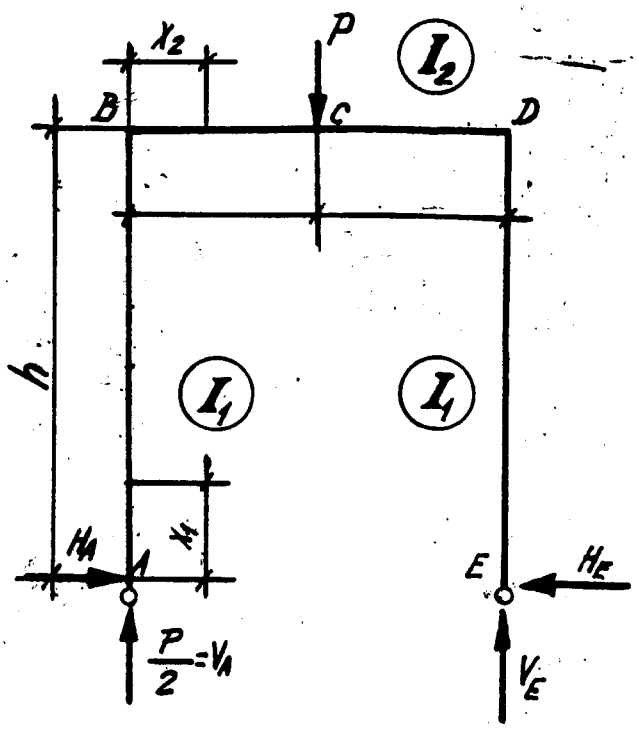


Fig. 253

6.22. Se dă cadrul odată static nedeterminat din figură.

Se cere să se calculeze deplasarea verticală în punctul C. Momentele de inerţie al stîlpului sînt I_1 iar al riglei I_2 ($\frac{I_2}{I_1} = n$).

Se va apliça teorema lui Castigliano.

Pentru a calcula deplasarea verticală trebuie să cunoaştem reacţiunile V şi H ale cadrului.

Din relaţiile de proecţii rezultă că reacţiunile verticale sînt $V = \frac{P}{2}$ iar împingerea orizontală nu se poate determina decît aplicînd corolarul teoremei lui Castigliano referitor la sistemele static nedeterminate şi anume :

Reacţiunile la un sistem static nedeterminat se desvoltă astfel : ca energie potenţială de deformare a sistemului să fie minimă, adică derivata ei în raport cu reacţiunea H să fie nulă $\frac{\partial U}{\partial H} = o$ (deplasarea orizontală a reazemului articulat este împiedicată).

Dar $\frac{\partial U}{\partial H} = \int_L \frac{M_x}{EI}\frac{\partial M_x}{\partial H}\,dx$ In cazul nostru însă din cauza simetriei relaţia devine :

$$\frac{\partial U}{\partial H} = o = 2\int_0^h \frac{M_{x_1}}{EI_1}\cdot\frac{\partial M_{x_1}}{\partial H}dx_1 + 2\int_0^{l/2}\frac{M_{x_2}}{EI_2}\frac{\partial M_{x_2}}{\partial H}dx_2$$

deoarece expresia momentului încovoietor şi valoarea momentului de inerţie variază de-alungul sistemului

$$M_{x_1} = -Hx_1$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial H} = -x_1$$

$$M_{x_2} = - H.h + \frac{P}{2} \cdot x_2$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial H} = - h$$

Inlocuind în expresia de mai sus căpătăm :

$$o = \frac{2}{EI_1} \int_o^h (-Hx_1)(-x_1)dx_1 + \frac{2}{EI_2} \int_o^{l_2} (-H h + \frac{P}{2} x_2)(-h)\, dx_2$$

sau:

$$o = \frac{H h^3}{3 I_1} + \frac{1}{I_2} (\frac{Ph^2 l}{2} - \frac{P}{2} h \frac{(\frac{l}{2})^2}{2}) = \frac{H h^3}{3 I_1} + \frac{H}{2} \frac{h^2 l}{I_2} - \frac{P h l^2}{16 I_2}$$

De unde :

$$H = \frac{\frac{P h l^2}{16 I_2}}{\frac{h^3}{3I_1} + \frac{h^2 l}{2I_2}} = \frac{-3 P l^2}{8 h (2 n h + 3 l)}$$

Pentru a calcula deplasarea verticală în punctul C δ_c derivăm expresia energiei potenţiale de deformaţie, în raport cu P.

$$\delta_c = \frac{\partial U}{\partial P} = 2 \int_o^h \frac{M_{x_1}}{EI_1} \frac{\partial M_{x_1}}{\partial P} dx_1 + 2 \int_o^{l/2} \frac{M_{x_2}}{EI_2} \frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} dx_2$$

$$M_{x_1} = - H x_1 = - \frac{-3 P l^2}{8 h (2nh+3 l)} x_1$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial P_1} = - \frac{3 l^2}{8 h (2nh + 3 l)} x_1$$

$$M_{x_2} = + \frac{P}{2} x_2 - \frac{3 P l^2}{8h(2nh + 3 l)} - h = + \frac{P}{2} x_2 - \frac{3 P l^2}{8 (2nh+3 l)}$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} = + \frac{x_2}{2} - \frac{3 l^2}{8 (2nh+3 l)}$$

Inlocuind aceste relaţii în expresia de mai sus, căpătăm:

$$\delta_c = \frac{2}{EI_1} \int_o^h (- \frac{3 P l^2}{8h(2nh+3 l)} x_1) \left[(- \frac{3 l^2 x_1}{8h(2nh+3l)} \right] dx_1 +$$

$$+ \frac{2}{EI_2} \int_o^{l/2} \left[(\frac{P}{2} x_2 - \frac{3 P l^2}{8(2nh+3 l)}) \right] \left[(\frac{x_2}{2} - \frac{3 l^3}{8(2nh+3 l)}) \right] dx_2$$

Efectuînd calculele obţinem :

$$\delta_c = \frac{2}{EI_1} - \frac{9\,P\,l^4}{64\,h^2(2nh+3\,l)^2}\,\frac{h^3}{3} + \frac{2}{EI_2}\left[\frac{P}{4}\cdot\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\,P\,l^2}{16\,(2nh+3\,l)}\,\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{3\,P\,l^2}{16\,(2nh+3\,l)}\,\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{9\,P\,l^4}{64(2nh+3\,l)^2}\,\frac{l}{2}\right]$$

$$\delta_c = \frac{3\,P\,l^4 h}{32\,EI_1(2nh+3\,l)^2} + \frac{P\,l^3}{48\,EI_2} - \frac{3\,P\,l^4}{128(2nh+3\,l)EI_2} -$$

$$- \frac{3\,P\,l^4}{128\,(2nh+3\,l)EI_2} + \frac{9\,P\,l^5}{128\,(2nh+3\,l)\,EI_2}$$

$$\delta_c = \frac{36\,n\,P\,l^4 h - 18\,(2nh+3\,l)P\,l^4 + 27\,P\,l^5}{384\,EI_2(2nh+3\,l)^2} + \frac{P\,l^3}{48\,EI_2}$$

$$\delta = \frac{9\,P\,l^5}{128\,EI_2\,(2nh+3\,l)^2} + \frac{P\,l^3}{48\,EI_2}$$

Se vede că deplasarea δ_c este mai mică decît a unei grinzi simplu rezemate, termenul 1 reprezintă tocmai scăderea datorită efectului de cadru, iar termenul 2, deplasarea corespunzătoare unei grinzi simple rezemate.

6.23. Se dă un sistem de 5 bare articulate avînd aceiaş secţiune A, aceiaş lungime l şi din acelaş material E solicitat de forţa P.

Se cere să se calculeze expresia deplasării verticale a punctului 1 aplicînd teorema Castigliano.

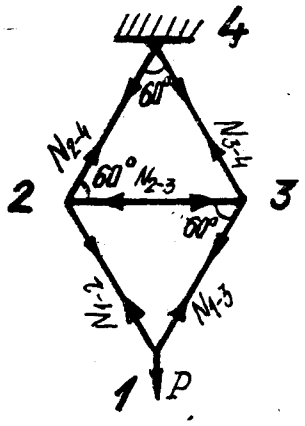


Fig.254

In barele sistemului din figură apar numai eforturi axiale de întindere sau compresiune care se pot calcula foarte uşor folosind metoda izolării nodurilor.

Astfel vom avea :

$$2\,N_{12}\cos 30^0 = P \quad \text{sau}$$

$$N_{12} = N_{13} = \frac{P}{2\cos 30^0} = \frac{P}{\sqrt{3}}$$

Scriind apoi ecuaţiile de proiecţie pe orizontală şi verticală în punctele 2 şi 3 rezultă că :

$$N_{24} = N_{34} = N_{12} = N_{13}$$

şi

$$N_{23} = 2\,N_{12}\cos 60^0 = N_{12}$$

Se poate remarca că efortul N_{23} este de compresiune toate celelalte fiind de întindere.

Expresia deplasării va fi :

$$y_1 = \frac{\partial U}{\partial P}$$

unde L este lucrul mecanic interior, de deformaţie al sistemului expresia lui fiind :

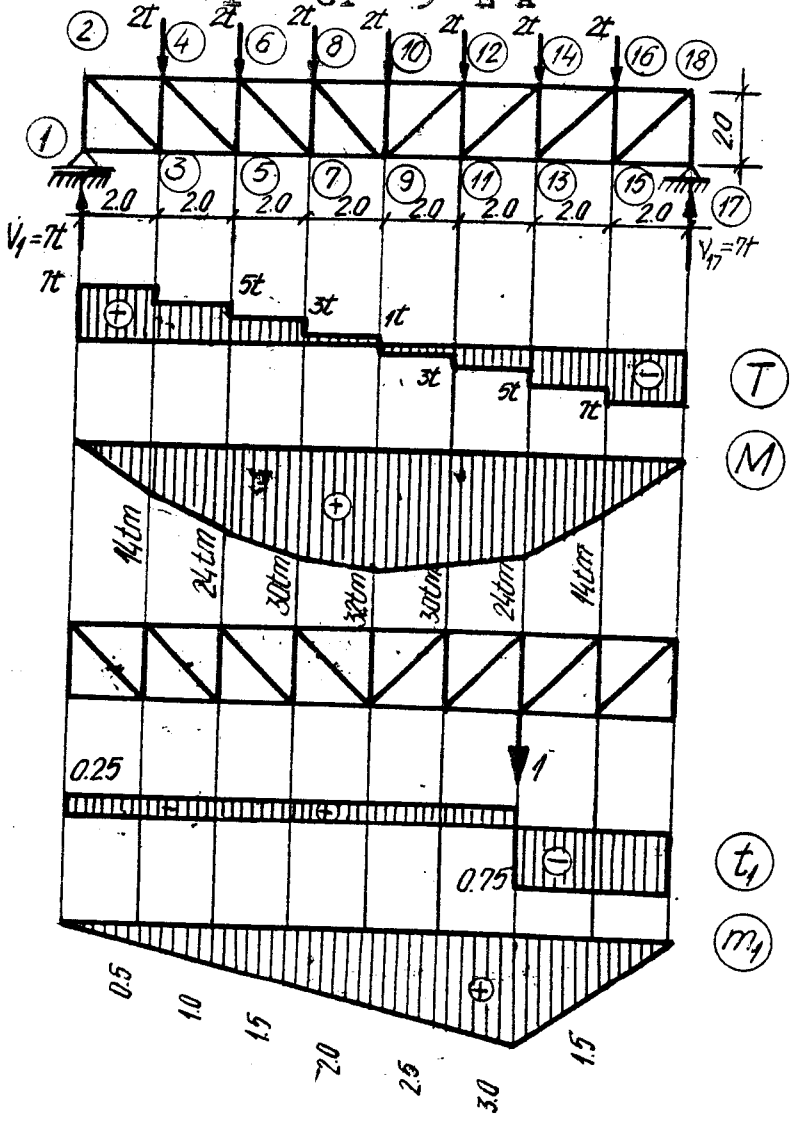
$$U = \sum \frac{1}{2} \frac{N_i^2 l_i}{E A_i}$$

In cazul nostru toate eforturile fiind egale cu valoarea, lucrul mecanic de deformaţie va fi:

$$U = 5 \cdot \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{E A} = \frac{5}{6} \frac{P^2 l}{E A}$$

iar deplasarea punctului 1

$$y_1 = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{5}{3} \frac{P l}{E A}$$



6.24. Se cere să se determine deplasarea verticală a punctului 13 a grinzii cu zăbrele din figură.

Se ca considera că tălpile au secţiunea $A_1 = 15\ cm^2$, iar montanţii şi diagonalele $A_2 = 10\ cm^2$.

$E = 2{,}1 \times 10^6\ kg/cm^2$

Intrucît în grinda cu zăbrele nu apar decît eforturi axiale utilizînd metoda Maxwell-Mohr vom aplica formula :

$$y_{13} = \sum_{i=1}^{i=n} \int \frac{N_{x_i} n_{x_i}}{E A_i} di$$

unde :

N_{x_1} sînt eforturile

din barele grinzii datorită încărcării reale :

iar n_{x_1} - eforturile datorită sarcinii unitare aplicate în punctul şi având direcţia în care ni se cere să determinăm deplasarea.

(în problema de punctul 13 având direcţia verticală).

În ceea ce face atît A_{x_1} cît şi n_{x_1} sînt constante în lungul barelor astfel că expresia deplasării în punctul 13 devine

$$y_{13} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{N_i \, n_i}{E \, A_1} \, l_i$$

Calculul deplasării se redă sub forma următoare de mai jos.

Bara	N_i T	n_i	l_i m	A_i cm²	$\frac{N_i \, n_i}{A_i} \, l_i$ cm
1 - 2	- 7,00	- 0,25	2,00	10,00	+ 0,0175
2 - 3	+ 10,00	+ 1,353	2,83	10,00	+ 0,0478
3 - 4	- 7,00	- 0,5	2,00	10,00	+ 0,0175
4 - 5	+ 7,00	+ 0,353	2,83	10,00	+ 0,0175
5 - 6	- 7,00	- 0,25	2,00	10,00	+ 0,0119
6 - 7	- 7,00	- 0,25	2,00	10,00	+ 0,0072
7 - 8	+ 1,42	+ 0,353	2,83	10,00	+ 0,0068
8 - 12	- 2,00	0,00	2,00	10,00	0,0000
12 - 11	+ 1,42	- 0,353	2,83	10,00	- 0,0068
11 - 10	- 7,00	- 0,25	2,00	10,00	+ 0,0072
10 - 9	+ 10,00	- 0,353	2,83	10,00	- 0,0205
9 - 13	- 7,00	+ 0,25	2,00	10,00	- 0,0119
13 - 14	+ 7,00	+ 1,00	2,83	10,00	+ 0,1010
14 - 15	- 7,00	- 0,75	2,00	10,00	+ 0,0500
15 - 16	+ 10,00	+ 1,00	2,83	10,00	+ 0,1430
16 - 17	- 7,00	- 0,75	2,00	10,00	+ 0,0500
17 - 18	0,00	0,00	2,00	15,00	0,0000
18 - 4	- 7,00	+ 0,25	2,00	15,00	+ 0,0117
4 - 3	+ 7,00	+ 0,50	2,00	15,00	+ 0,0382
3 - 8	+ 10,00	+ 0,75	2,00	15,00	+ 0,0715
8 - 7	+ 12,00	+ 1,25	2,00	15,00	+ 0,1195
7 - 11	+ 12,00	+ 1,50	2,00	15,00	+ 0,1150
11 - 15	+ 7,00	+ 0,75	2,00	15,00	+ 0,0336
15 - 17	0,00	0,00	2,00	15,00	0,0000
17 - 4	- 7,00	- 0,25	2,00	15,00	+ 0,0342
4 - 8	- 12,00	- 0,50	2,00	15,00	- 0,0382
8 - 10	- 10,00	- 0,75	2,00	15,00	+ 0,0715
10 - 12	- 10,00	- 1,00	2,00	15,00	+ 0,1015
12 - 14	- 15,00	- 1,00	2,00	15,00	+ 0,1015
14 - 16	- 15,00	- 1,25	2,00	15,00	+ 0,1190
16 - 18	- 12,00	- 1,50	2,00	15,00	+ 0,1150
18 - 13	- 7,00	- 0,75	2,00	15,00	+ 0,0337

$$y_{13} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{N_i \, n_i}{A_i \, E} \, l_i = 1,4337 \text{ cm}$$

6.25. Să se studieze o conductă orizontală rezemată de-alungul generatoarei pe jumătate umplută cu un lichid avînd greutatea specifică γ.

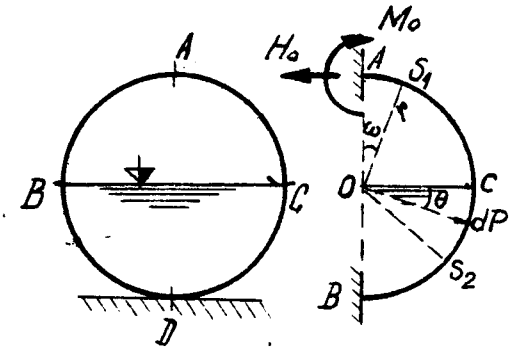


Fig. 256

Neţinînd seama de greutatea proprie a tubului şi luînd ca lungimi unitatea pentru a determina eforturile la pereţii conductei, vom face o secţiune introducînd ca necunoscute numai eforturile H_o şi M_o (T_o = o baza simetriei) pe care le vom calcula aplicînd teorema lui Castigliano, ştiind că rotirea şi deplasarea orizontală a punctului A sînt nule, adică :

$$\chi_{A\ o} = \frac{1}{EI}\int_L M_x \frac{\partial M_x}{\partial H_o}\,dx = o$$

$$\theta_{A\cdot o} = \frac{1}{EI}\int M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_o}\,dx = o$$

şi ţinînd seama că avem două zone diferite de variaţie a momentului încovoietor şi anume prima de la A la C iar a doua de la C şi B, vom avea pentru primul domeniu :

$$M_{x_1} = -H_o r(1-\cos\omega) + M_o \;:\; \frac{\partial M_{x_1}}{\partial H_o} = -r(1-\cos\omega) \;:\; \frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_o} = 1$$

In zona a doua se poate scrie :

$$M_{x_2} = -H_o r(1+\sin\omega) + M_o + \int_o^{\omega} \gamma r \sin\theta\, r\,d\theta\, r\sin(\omega-\theta) =$$

$$= -H_o r(1+\sin\omega) + M_o + \frac{\gamma r^3}{2}(\sin^3\omega + \sin\omega\cos^2\omega - \omega\cos\omega)$$

iar derivatele $\frac{\partial M_{x_2}}{\partial H_o} = -r(1+\sin\omega)$ şi $\frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_o} = 1$

Ecuaţiile deplasării şi rotirii reies :

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} M_{x_1}\frac{\partial M_{x_1}}{\partial H_o}\,ds + \int_o^{\frac{\pi}{2}} M_{x_2}\frac{\partial M_{x_2}}{\partial H_o}\,ds = o$$

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} M_{x_1}\frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_o}\,ds + \int_o^{\frac{\pi}{2}} M_{x_2}\frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_o}\,ds = o$$

A d i c ă :

$$24\, H_o r - 16\, \pi\, M_o = (16 - 3\pi)\, \gamma\, r^3$$

$$4\, H_o r - 4\, \pi\, M_o = (4 - \pi)\, \gamma\, r^3$$

de unde :

$$H_o = \frac{\gamma r^2}{8} \text{ t/ml}$$

$$M_o = \frac{3\pi - 8}{8\pi}\, \gamma\, r^3 \text{ tm/ml}$$

Cunoscînd H_o şi M_o putem stabili eforturile în orice secţiune al conductei, o putem dimensiona.

6.25. Se dă sistemul de bare din figură (vezi problema 8.10) format din tirantul BC avînd o secţiune compusă din 20/22 şi grinda AB avînd secţiunea dintr-un profil I 22.

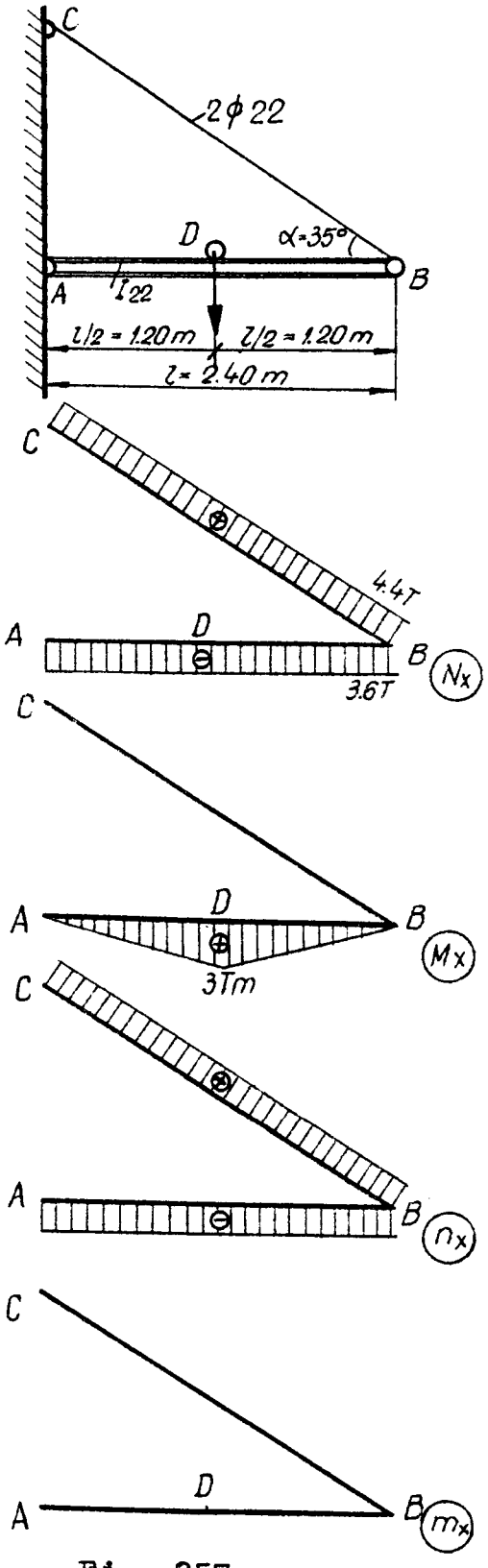


Fig. 257

Se cere deplasarea berticală a punctului B cînd sarcina P = 5 T se aplică în punctul D.

Eforturile secţionale N_x şi M_x din bare vor fi conform diagramelor.

Utilizînd metoda Maxwell - Mohr va trebui să aplicăm o sarcină unitară verticală în punctul B (punctul în care se cere deplasarea verticală) din care vor rezulta diagramele n_{x_i} şi m_{x_i}

Expresia deplasării verticale în punctul B va fi :

$$y_B = \sum \int_L \frac{M_{x_i}}{EI_i} m_{x_i} ds + \sum \int_{L_{nuE}} \frac{N_{x_i}}{EA_i} n_{x_i} ds$$

Termenul m_{x_i} fiind nul expresia deplasării se reduce la :

$$y_B = \sum \int_L \frac{N_{x_i}}{EA_i} n_{x_i} ds$$ - dar atît N_{x_i} cît şi n_{x_i} fiind constante pe barele AC şi BC atunci expresia deplasării se poate scrie :

$$y_B = \sum \frac{N_i}{EA_i} n_i l_1$$

Numeric deplasarea pe verticală a punctului B devine :

$$y_B = \frac{+(4400)x(+1,76)}{2,1 \times 10^6 \cdot 7,6} \times 293 +$$

$$+ \frac{(-3600)(-1.445)}{2,1 \times 10^6 \cdot 39,5} (240) = 0,143 + 0,015 = 0,158 \text{ cm}$$

6.27. Un cadru cotit în spaţiu avînd o secţiune pătrată b x b din oţel, este supus la acţiunea unei forţe concentrate P, în punctul 1. Se cere să se determine deplasarea verticală a punctului 1 folosind metoda Castigliano.

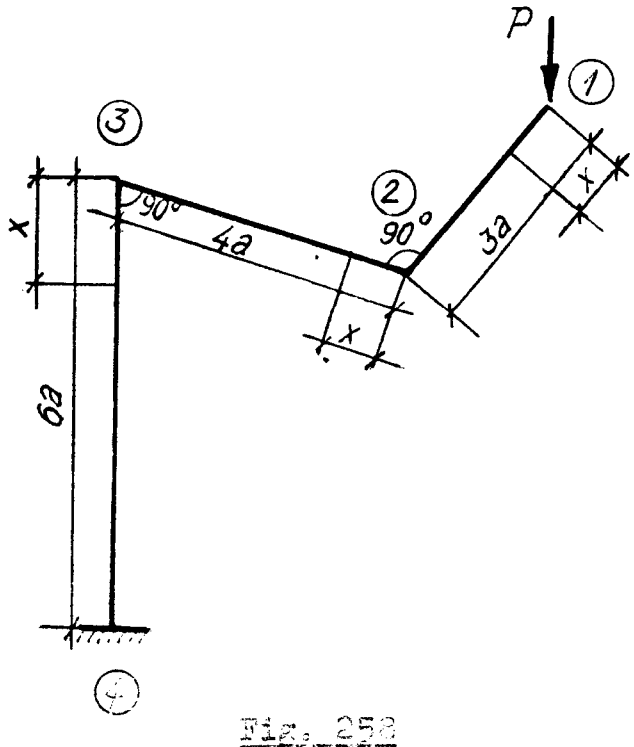


Fig. 252

Exemplu numeric :

$a=0,5$ m; $P=400$ kg; $b=15$ cm;

$E=2,1 \times 10^6$ kG/cm^2;

$G=8,1 \times 10^5 \times$ kG/cm^2

Expresia deplasării în cazul cel mai general este :

$$\delta = \int \frac{M_{i_x}}{EI} \frac{\partial N_{i_x}}{\partial P} dx + \int \frac{M_{i_x}}{GIr} \frac{\partial N_{t_x}}{\partial P} dx + K \int \frac{T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P} dx + \int \frac{N_x}{EA} \frac{\partial N_x}{\partial P} dx$$

(ţinînd seama de momentul încovoietor, momentul răsucitor de forţa tăietoare şi de forţa axială). Va trebui să integrăm expresia de mai sus de-a lungul întregului cadru cotit pe porţiuni, însumîndu-le apoi.

Pe bara 1-2 acţionează ca solicitări momentul încovoietor şi forţa tăietoare.

$$\delta_1 = \int_0^{3a} \frac{M_x}{EI} \frac{\partial M_x}{\partial P} dx + K \int_0^{3a} \frac{T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P} dx$$

unde :

$$M_x = -P x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -x$$

$$T_x = +P$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial P} = +1$$

Deci : $\delta_1 = \int_0^{3a} \frac{(-Px)}{EI}(-x)dx + K \int_0^{3a} \frac{P}{GA}(1)dx = +\frac{P}{3}\cdot\frac{x^3}{EI}\Big|_0^{3a} + K\frac{P}{GA}x\Big|_0^{3a}$

$$= \frac{9Pa^3}{EI} + K\frac{3Pa}{GA}$$

Pe porţiunea 2-3 acţionează ca solicitări: momentul încovoietor, momentul de răsucire şi forţa tăietoare.

Deci expresia deplasării pe porţiunea 2-3 va fi :

$$\delta_1^{II} = \int_0^{4a} \frac{M_{ix}}{EI} \frac{\partial M_{ix}}{\partial P} dx + \int_0^{4a} \frac{M_{rx}}{GI} \frac{\partial M_{tx}}{\partial P} dx + k \int_0^{4a} \frac{T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P} dx$$

iar:

$$M_{ix} = - P x$$

$$\frac{\partial M_{ix}}{\partial P} = - x$$

$$M_{rx} = + 3 P a$$

$$\frac{\partial M_{rx}}{\partial P} = + 3 a$$

$$Tx = + P$$

$$\frac{\partial Tx}{\partial P} = + 1$$

Atunci :

$$\delta_1^{II} = \int_0^{4a} \frac{(-Px)}{EI}(-x)dx + \int_0^{4a} \frac{(+3Pa)}{G I_r}(+3a)dx + k \int_0^{4a} \frac{(+P)}{GA}(x1)\, dx$$

$$\delta_1^{II} = \frac{Px^3}{3EI}\Big|_0^{4a} + \frac{9Pa^2}{G I_t} x \Big|_0^{4a} + K \frac{P}{GA} x \Big|_0^{4a} = \frac{64Pa^3}{3 EI} + \frac{36 Pa^3}{G I_r} + K \frac{4 P a}{GA}$$

In regiunea 3-4 bara este supusă la încovoiere şi compresiune, iar expresia deplasării va avea forma :

$$\delta_1^{III} = \int_0^{6a} \frac{M_{ix}}{EI} \frac{\partial M_{ix}}{\partial P} dx + \int_0^{6a} \frac{M_x}{EA} \frac{\partial N_x}{\partial P} dx$$

unde :

$$M_{ix} = -\sqrt{(2 P a)^2 + (4 Pa)^2} = - 5 Pa$$

$$\frac{\partial M_{ix}}{\partial P} = - 5 a$$

$$N_x = - P$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial P} = - 1$$

6a. Inlocuind în expresia deplasării căpătăm :

$$\delta_1^{III} = \int_0^{6a} \frac{(-5 Pa)}{EI}(-5 a)dx + \int_0^{6a} \frac{(-P)}{EA}(-1)dx = \left| \frac{25 Pa^2}{EI} x \right|_0^{6a} + \left| \frac{Px}{EA} \right|_0^{6a} =$$

$$+ \frac{150 Pa^3}{EI} + \frac{6 P a}{EA}$$

Deplasarea totală verticală a punctului 1 se determină prin însumarea celor trei expresii δ'_1, δ''_1 şi δ'''_1.

$$\delta_1 = \frac{9\,Pa^3}{EI} + K\frac{3\,Pa}{GA} + \frac{64\,Pa^3}{3\,EI} + \frac{36\,Pa^3}{G\,I_t} + K\frac{4\,Pa}{GA} + \frac{150\,Pa^3}{EI} + \frac{6\,Pa}{EA} =$$

$$= \frac{541\,P\,a^3}{3\,EI} + \frac{36\,P\,a^3}{GI_r} + 1{,}2\,\frac{7\,P\,a}{Ga} + \frac{6\,P\,a}{EA}$$

unde am luat coeficientul de formă $K = 1{,}2$ secţiunea fiind pătrată.

Caracteristicile geometrice sînt următoarele :

$$I = \frac{15^4}{12} = 4220\ cm^4$$

$$I_p = 0{,}141 \cdot 15^4 = 7050\ cm^4$$

$$A = 15 \times 15 = 225\ cm^2$$

Deci :

$$\delta_1 = \frac{541 \times 400 \times 50^3}{3 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 4220} + \frac{36 \times 400 \times 50^3}{8{,}1 \times 10^5 \times 7050} + 1{,}2\,\frac{7 \times 400 \times 50}{8{,}1 \times 10^5 \times 225} + \frac{6 \times 400 \times 50}{2{,}1 \times 10^6 \times 225} =$$

$$\delta_1 = 1{,}02 + 0{,}315 + 0{,}00092 + 0{,}000253 = 1{,}336\ cm$$

Se poate remarca că în expresia deplasării ponderea forţelor tăietoare şi axiale este neglijabilă în raport cu momentul încovoietor şi răsucitor.

6.28. Se dă grinda alăturată simplu rezemată. Se cere să se calculeze deplasarea şi rotirea în punctul 2 cu metoda Vereşceaghin, figura 259.

Metoda lui Vereşceaghin este o simplificare a metodei lui Castigliano şi anume relaţiile lui Catigliano devin scrise astfel :

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_L M_x \frac{\partial M_x}{\partial P}\,dx = \frac{1}{EI}\int_L M_x m_x d_x$$

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{M}} = \frac{1}{EI}\int_L M_x \frac{\partial M_x}{\partial \mathcal{M}}\,dx = \frac{1}{EI}\int_L M_x m_x d_x$$

unde M_x aînt momentele încovoietoare în secţiuni curente iar m_x sînt momente încovoietoare din sarcina unitară din punctul unde ni se cere deplasarea sau rotirea (de forţă unitară în cazul deplasării şi de un cuplu unitar în cadrul rotirii).

Verreşceaghin propune ca pentru determinarea deplasării integrala $\int_L M_x m_x d_x$ se poate calcula înmulţind suprafaţa diagramei de momente încovoietoare cu ordonata corespunzătoare din dreptul centrului său de greutate din diagrama unitară.

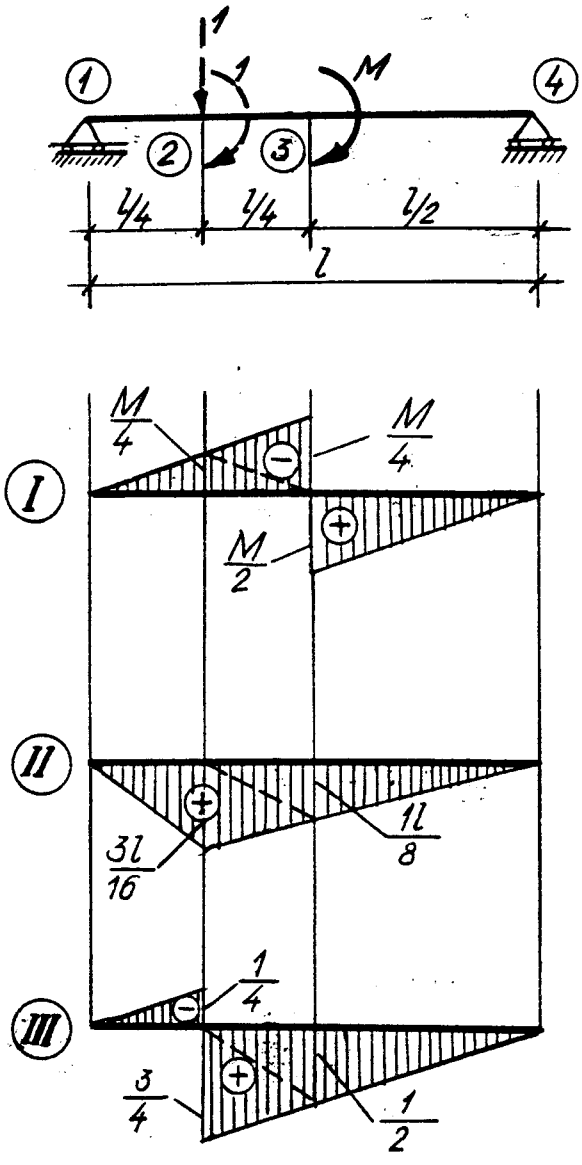


Fig. 259

In acest sens vom avea nevoie de trei diagrame:

diagrama de momente încovoietoare din sarcinile exteriore I)

- diagrama de momente încovoietoare provenite din sarcina unitară P = 1 aplicată în punctul 2 (ni se cere deplasarea în 2) (II)

. diagrama de momente încovoietoare provenită din momentul unitar $\mathcal{M}$ = 1 aplicat în punctul 2 (ni se cere rotirea în 2) (III)

Pentru calcularea deplasării în punctul 2 integrăm pe 3 porţiuni diagrama (1) cu (II) avem :

$$EI\,\delta_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{4}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{16}l - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{4}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{16}l + \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}l\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}l = -\frac{Ml^2}{256} - \left[\frac{Ml^2}{256} + \frac{Ml^2}{192}\right] + \frac{Ml^2}{96}$$

Rezultă : $\delta_2 = -\frac{Ml^2}{38EI}$ (se ridică în sus invers sensului forţei unitare anticipate de noi).

Pentru calcularea rotirii în punctul 2 integrăm pe 3 porţiuni diagrama (I) cu (III) avînd :

$$EI\,\varphi_2 = +\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{4}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{4}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = +\frac{Ml}{192} - \left[\frac{Ml}{64} + \frac{Ml}{48}\right] + \frac{Ml}{24}$$

Rezultă : $\varphi_2 = +\frac{Ml}{96EI}$ (deci rotirea are loc în sensul momentului unitar, pe care l-am prevăzut.

6.29.- Se dă grinda încastrată în figură, încărcată cu o sarcină concentrată P. (fig.260).

Se cere deplasarea şi rotirea în punctul 2 prin metoda lui Vereşceaghin.

Vom trasa diagramele de momente încovoietoare provenind din :

- încărcări exterioare (I)

- sarcină unitară verticală aplicată în 2 (este necesar să calculăm, deplasarea verticală în punctul 2);

- momentul unitar aplicat în 2 (este necesar să calculăm rotirea în punctul 2).

Pentru calcularea deplasării este nevoie să integrăm diagramele (I) cu (II) pe porţiunea 1-2 întrucît diagrama (II) este nulă pe zona 2-3. Vom înmulţi deci suprafeţele diagramei (I) cu ordonatele diagramei II din dreptul centrelor de greutate corespunzătoare diagramei I.

In consecinţă vom avea :

$$EI\,\delta_2 = \frac{1}{2} P l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P l^3}{12} + \frac{P l^3}{48} =$$

$$= \frac{5\,P\,l^3}{48} \qquad \delta = \frac{5Pl^3}{48\,EI}$$

Rotirea din punctul 2 se calculează înmulţind suprafeţele diagramelor de momente (I) cu ordonatele corespunzătoare centrelor lor de greutate din diagrama (III)

Astfel vom avea :

$$EI\,\psi_2 = \frac{1}{2} \cdot P\,l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P\,l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= \frac{P\,l^2}{4} \cdot \frac{P\,l^2}{8} = \frac{3\,P\,l^2}{8}$$

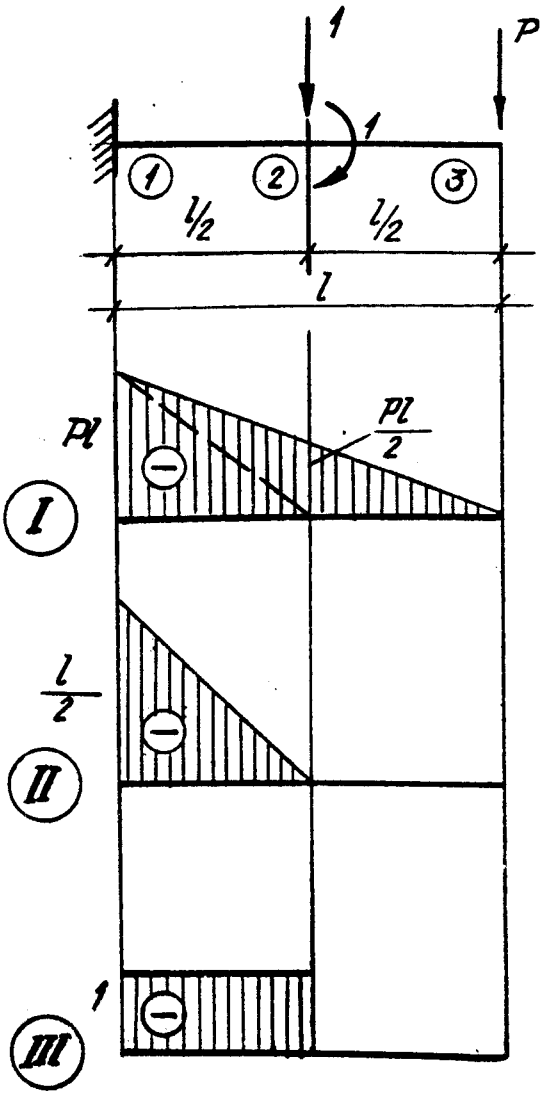


Fig. 260

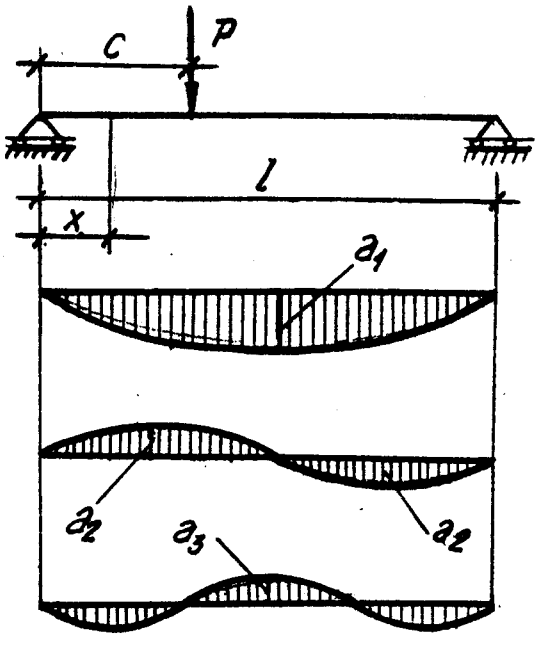


Fig. 261

$$\varphi_2 = \frac{3\,P\,l^2}{8\,E\,I}$$

Sensul atît a deplasării cît şi a rotirii este + deoarece ambele diagrame sînt negative adică şi suprafaţa diagramelor de momente (I) este negativă dar şi ordonatele corespunzătoare din diagramele (II) şi (III) sînt negative - produsul fiind pozitiv în ambele cazuri ceea ce înseamnă că deplasarea reală are loc în sensul forţei unitare iar rotirea în sensul momentului unitar.

6.30.- Să se determine expresia deplasării y(x) a unei grinzi simplu rezemată cu o sarcină concentrată aplicată la distanţă c, prin metoda variaţională aproximativă Ritz - Timosenco. Particularitatea pentru cazul cînd $c = \frac{1}{2}$

In loc să se determine deplsarea y (x) din integrala ecuaţiei diferenţiale, prin metoda Ritz-Timosenco se consideră y(x) dat sub forma unei serii finite sau infinite de funcţii $f_1, f_2, f_3 \ldots$

$y = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \ldots\ldots$

unde $f_1, f_2, f_3 \ldots$ sînt nişte funcţii arbitrare însă ortogonale care trebuie să satisfacă condiţiile la limită adică să respecte legăturile sistemului în rezemă-

rile sale, iar a_1, a_2, a_3 ..... sînt niște coeficienți nedeterminați.

Valoarea coeficienților a_1, a_2, a_3 .... se deduc din condiția că energia potențială totală Π să fie minimă (Teorema minimului - energia ei potențială totală arată că un sistem elastic încărcat cu anumite forțe date se deformează astfel încît energia sa potențială totală Π să fie minimă), adică din condiția ca derivatele parțiale ale funcției Π în raport cu fiecare din coeficienții a_i să fie nule :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \text{ - - - - -}$$

Condițiile de mai sus constituie un sistem de ecuații din care se deduc coeficienții a_1, a_2 ..

Alegînd în mod convenabil funcțiile f_1, f_2 vom, putea găsi pe această cale o soluție aproximativă a fibrei medii deformate.

Alegînd ecuația fibrei medii sub forma :

$$y(x) = a \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \ldots$$

unde funcțiile $\sin \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{2\pi x}{l}$ etc, sînt ortogonale și satisfac condițiile de contur anulîndu-se pentru $x = 0$ și $x = l$ = ($y = 0$ și $y'' = 0$).

Păstrînd un singur termen obținem :

$$y = a_1 \sin \frac{\pi}{l} x$$

Energia potențială totală Π este compusă din doi termeni:

$$\Pi = U_i + U_e$$

unde : U_i este energia potențială de deformație

U_e este energia potențială a forțelor exterioare

Expresiile lor sînt :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dx = \frac{1}{2} EI \int_0^l a_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi}{l} x \, dx = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} a_1^2$$

$$U_e = - P y_c = - P a_1 \sin \frac{\pi}{l} c$$

Condiția de minim pentru Π duce la :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{\partial U_i}{\partial a_1} + \frac{\partial U_e}{\partial a_1} = 0 \text{ adică : } \frac{\pi^4 EI}{2 l^3} a_1 - P \sin \frac{\pi}{l} c = 0$$

de unde :

$$a_i = \frac{2\,P\,l^3}{\pi^4\,EI}\sin\frac{\pi}{l}c$$

Expresia deplasării va fi :

$$y = \frac{2\,P\,l^3}{\pi^4\,EI}\sin\frac{\pi}{l}c\,\sin\frac{\pi}{l}x\ \ldots$$

Dacă forţa P se aplică la mijlocul grinzii adică c = 1/2 vom avea la mijlocul deschiderii :

$$y = \frac{2\,P\,l^3}{\pi^4\,EI}\sin\frac{\pi}{l}x$$

$$y_{max} = \frac{2\,P\,l^3}{\pi^4\,EI} = \frac{P\,l^3}{48,7\,EI} = 0,020532\,\frac{P\,l^3}{EI}$$

Soluţia exactă stabileşte următoarea valoare pentru săgeata maximă

$$y_{max} = \frac{P\,l^3}{48EI} = 0,02085\,\frac{P\,l^3}{EI}$$

eroarea rezultată este de circa 1,5% dacă luăm un singur termen al seriei.

Dacă se consideră primii doi termeni, rezultă următoarea expresie a deplasării (am luat în considerare numai termenii i-pari întrucît termeni pari se vor anula în cazul sarcinii simetrice).

$$y(x) = a_1\sin\frac{\pi}{l}x + a_3\sin\frac{3\pi}{l}x$$

rezultă :

$$y'' = -a_1\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi}{l}x - a_3\frac{9\pi^2}{l^2}\sin\frac{3\pi}{l}x$$

Expresiile energiei potenţiale de deformaţie U_i şi a energiei potenţiale a forţelor exterioare U_e vor fi în acest caz :

$$U_i = \frac{1}{2}\int_0^l EIy''^2dx = \frac{1}{2}EI\left[a_1^2\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l\sin\frac{2\pi}{l}x\,dx + a_3^2\frac{81\pi^4}{l^4}\int_0^l\sin^2\frac{3\pi}{l}x\,dx + 0\right]$$

$$U_i = \frac{1}{2}EI\left[a_1^2\frac{\pi^4}{l^4}\cdot\frac{l}{2} + a_3^2\frac{81\pi^4}{l^4}\cdot\frac{l}{2}\right] = \frac{\pi^4EI}{4l^3}(a_1^2 + 81\,a_3^2)$$

iar :

$$U_e = -P\left(a_1\sin\frac{\pi}{l}c + a_3\sin\frac{3\pi}{l}c\right)$$

In calculele de mai sus s-a ţinut seama că integralele de forma :

rp

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx = 0 \quad \text{cînd } n \neq k \text{ şi}$$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{K\pi}{l} x \, dx = \frac{1}{2} \text{ cînd } n = K$$

Condiţiile de minim a energiei potenţiale totale Π conduc la expresiile :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{\pi^4 EI}{2 l^3} a_1 - P \sin \frac{\pi}{l} c = 0$$

de unde $a_1 = \frac{2 P l^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi}{l} c$

şi $\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = \frac{81 \pi^4 EI}{2 l^3} a_3 - P \sin \frac{3\pi}{l} c = 0$

de unde : $a_3 = \frac{2 P l^3}{81 \pi^4 EI} \sin \frac{3\pi}{l} c$

Expresia deplasării devine :

$$y(x) = \frac{2 P l^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi}{l} c \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{2 P l^3}{81 \pi^4 EI} \sin \frac{3\pi}{l} c \sin \frac{3\pi}{l} =$$

$$= \frac{2 P l^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi}{l} c \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi}{l} c \sin \frac{3\pi}{l} x \right)$$

In cazul cînd forţa se aplică în mijlocul grinzii $c = \frac{1}{2}$ vom avea :

$$y(x) = \frac{2 P l^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi}{l} x - \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi}{l} x \right)$$

la mijlocul deschiderii $x = \frac{1}{2}$ deplasarea va fi :

$$y_{max} = \frac{2 P l^3}{\pi^4 EI} \left(1 + \frac{1}{81}\right) = \frac{P l^3}{48,11 EI} = 0,02079 \frac{P l^3}{EI}$$

adică obţinem o eroare de 0,2% faţă de valoarea exactă.

6.31.- Se dă o grindă de lemn avînd o secţiune dreptunghiulară 15 x 20 cm şi o înclinare faţă de verticală de 30^0 supusă la o sarcină verticală P = 1000 KG aplicată la mijlocul deschiderii (l = 2,80 m).

Se cere deplasarea punctului 0 de la mijlocul dechiderîii (figura 262).

Intrucît sarcina P nu acţionează după direcţii principale de inerţie pentru a putea aplica formulele cunoscute va trebui să descompunem după aceste direcţii respectiv după axele OZ şi OY.

$P_z = P \sin \alpha = P \sin 30^\circ = 1000 \times 0,5 = 500$ kG; $I_z = \frac{15 \times 20^3}{12} = 10000$ cm^2

$P_y = P \cos \alpha = P \cos 30^\circ = 1000 \times 0,867 = 867$ kG; $I_y = \frac{20 \times 15^3}{12} = 5620$ cm^4

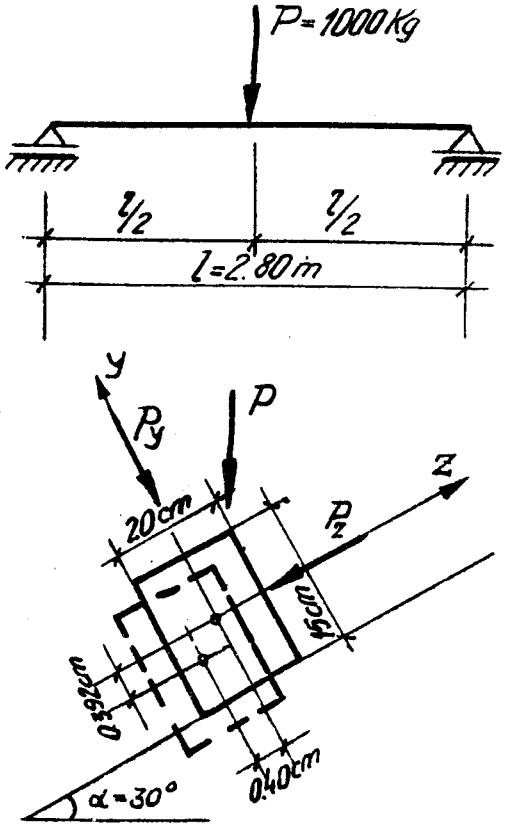


Fig. 6.31

Cînd avem o sarcină concentrată aplicată la mijlocul deschiderii deplasarea maximă este dată de relaţia :

$$f = \frac{P\, l^3}{48\, EI}$$

Deplasarea pe axa y este :

$$f_y = \frac{P_y \cdot l^3}{48 \cdot EI_z} = \frac{867 \times 2,8^3 \times 100^3}{\cdot 10^5 \times 10^4} = 0,39$$

Deplasarea pe axa z :

$$f_z = \frac{P_z \cdot l^3}{48 EI_y} = \frac{500 \times 2,8^3 \times 100^3}{48 \times 10^5 \times 5620} = 0,$$

Deplasarea totală

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} = \sqrt{0,39^2 + 0,}$$

$$= 0,56 \text{ cm}$$

Direcţia deplasării se poate vedea analitic că este normală pe axa neutră. Întradevăr înclinarea deplasării faţă de axa oy

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y} = \operatorname{tg} \alpha \times \frac{I_z}{I_y}$$ are aceiaşi expresie cu cea a axei neutre faţă de oz .

6.32. Se dă două grinzi 1 şi 2 cu lungimile l_1 şi l_2 şi cu momente de inerţie I_2 şi l_2, din acelaş material. Dacă acest sistem de grinzi e supus la o sarcină P normală pe planul lor se cere să se studieze în ce raport se distribuie sarcina la cele 2 grinzi .

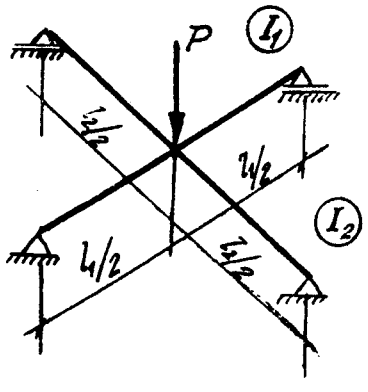


Fig. 6.32

Se va exemplifica apoi pe următoarele 3 cazuri :

1) $l_1 = l_2 = l$; 2) $l_1 = l_2 = l$

II) $I_1 = I_2 = I$; $2l_1 = l_2 = l$

III) $l_1 = 2l_2 = l$; $2\,l_1 = l_2 = l$

Notînd cu X fracţiunea din forţa P care revine grinzii 1 şi cu P-X partea din sarcină care revine grinzii 2 vom putea scrie că săgeata în punctul C a grinzii 1 sub sarcina X va trebui să fie egală cu săgeata în C a grinzii 2 sub sarcina P-X

$$\text{Deci } \frac{X\, l_1^3}{48\, EI_1} = \frac{(P-X)\, l_2^3}{48\, E\, I_2}$$

iar forţa pe care o preia grinda 1 va fi :

$$X = \frac{P\, l_2^3\, I_1}{l_1^3\, I_2 + l_1^3\, I_1} = \frac{P\, l_2^3}{\left(l_1^3 \frac{I_2}{I_1} + l_2^3\right)}$$

$$\text{Grinda 2 preia } P - X = \frac{P\, l_2^3}{\left(l_1^3 \frac{I_2}{I_1} + l^3{}_2\right)} = \frac{P\, l_1^3}{\left(l_1^3 + l_2^3 \frac{I_1}{I_2}\right)}$$

I) In cazul (I) $X = \frac{P}{2}$ iar $P - X = \frac{P}{2}$ deci forţa P se distribuie în mod egal între cele două grinzi identice.

II) In cazul (II) $I_1 = I_2 = I$; $l_1 = \frac{l}{2}$; $l_2 = l$

$$X = \frac{P\, l^3}{\left(\frac{l^3}{8} + l^3\right)} = \frac{8}{9} P \text{ iar } P - X = \frac{P\, \frac{l^3}{8}}{\left(\frac{l^3}{8} + l^3\right)} = \frac{1}{9} P$$

se remarcă deci că grinda 1 preia aproape întreaga forţă P dacă deschiderea ei este jumătate din dechiderea grinzii 2

III) In varianta (III) :

$I_1 = I$; $l_1 = \frac{l}{2}$

$I_2 = \frac{I}{2}$; $l_2 = l$

vom avea :

$$X = \frac{P\, l^3}{\left(\frac{l^3}{8} \cdot \frac{1}{2} + l^3\right)} = \frac{16}{17} X$$

$$P - X = \frac{P\, \frac{l^3}{8}}{\left(\frac{l^3}{8} + l^3\, 2\right)} = \frac{1}{17} P$$

Se observă că fracţiunea din forţa P care este preluată de către grinda 1 este mai mare decît în cazul II.

C A P I T O L U L VII

RASUCIREA ; RASUCIREA CU INCOVOIEREA

Pentru o secţiune dreptunghiulară

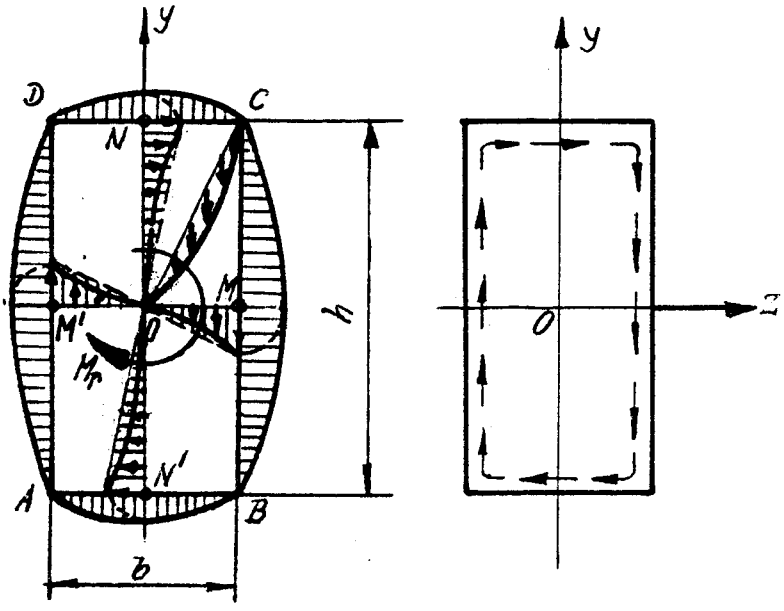


Fig. 24

Diagrama variaţiei efortului de răsucire " τ_r " pentru o secţiune dreptunghiulară, în lungul diferitelor raze şi în lungul laturilor dreptunghiului este arătată mai sus.

Remarcăm următoarele:

1. Variaţia efortului " τ_r " este neliniară.

2. efortul tangenţial maxim se găseşte în punctele de pe [illegible] (M, M') - cele mai apropiate de centrul O.

3. în colţurile dreptunghiului (A, B, C, D) - efortul τ_r " este nul.

4. latura b (spre exemplu) reprezintă întotdeauna dimensiunea mică a dreptunghiului, indiferent de aşezarea sa faţă de y.

5. putem aproxima variaţia efortului " τ_r " între punctele M sau M' (din interiorul dreptunghiului) ca liniară.

Probleme care se pun.

a). verificarea la rezistenţă, se face cu formula:

$$\tau_{ef\ max} = \frac{M_r^{max}}{W_r^{min}} \leq \tau_{adm}$$

unde: M_r^{max} - momentul de răsucire maxim (kg.cm).

momentul de răsucire poate varia în lungul axului;

trasăm diagrama momentelor de răsucire de-a lungul grinzii şi verificăm în secţiunea unde momentul M_r este maxim.

W_r^{min} = modulul de rezistenţă la răsucire minim (cm^3). Modulul de rezistenţă la răsucire variază pe secţiune. Il vom calcula în punctul al cărui modul este minim.

$W_r^{min} = W_{r,M}$ (apare în punctele M, respectiv M')

Deoarece : $W_{r,M} < W_{r,N}$; $\alpha_h \cdot b^2 \cdot h < \alpha_b \cdot b^2 \cdot h$

Intodeauna : $\alpha_h < \alpha_b$

α_h, α_b - coeficienţi funcţie de raportul $\frac{h}{b_o}$ (vezi tabela 71)

b). efortul τ_r într-un punct (k). Se află cu formula

$$\tau_{r,k} = \frac{M_r}{I_r} \varsigma_k$$

Unde: I_r - momentul de inerţie la răsucire (cm^4)

$$I_r = \beta b^3, h$$

β - un coeficient, funcţie de raportul $\frac{h}{b_o}$ (vezi tabela. ...)

c). verificarea la deformaţie. Se face cu formula :

$$\theta_{ef}^{max} = \frac{M_r}{G_r \cdot I_r} \leq \theta_{adm} \left(\frac{rad}{ml} \right)$$

unde : G - modulul de elasticitate transversal (kg/cm^2)

- pentru oţel de construcţie = 810.000 kg/cm^2
- pentru oţel cu nichel pentru poduri : G = [illegible] kg/cm^2
- pentru fontă : G = 4.500.000 kg/cm^2
- pentru lemn : G = 5.500 kg/cm^2 (paralel cu fibrele)

- Pentru un pătrat (b = h = a) avem :

$\frac{h}{b} = 1 \longrightarrow \alpha_h = \alpha_b = 0,208$; $\beta = 0,141$

Deci,

$W_{r,M} = W_{r,N} = 0,208 \times a^3$ (cm^3)

$I_r = 0,141 \times a^4$ (cm^4)

Modulele de rezistenţă la răsucire sînt aceleaşi pentru mijlocul ambelor laturi.

2.- Pentru o secţiune circulară (figura 265)

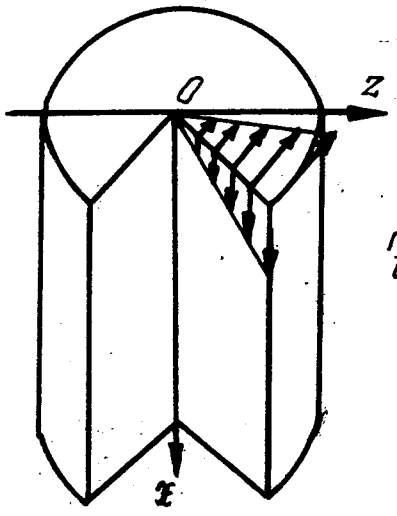


Fig. 265

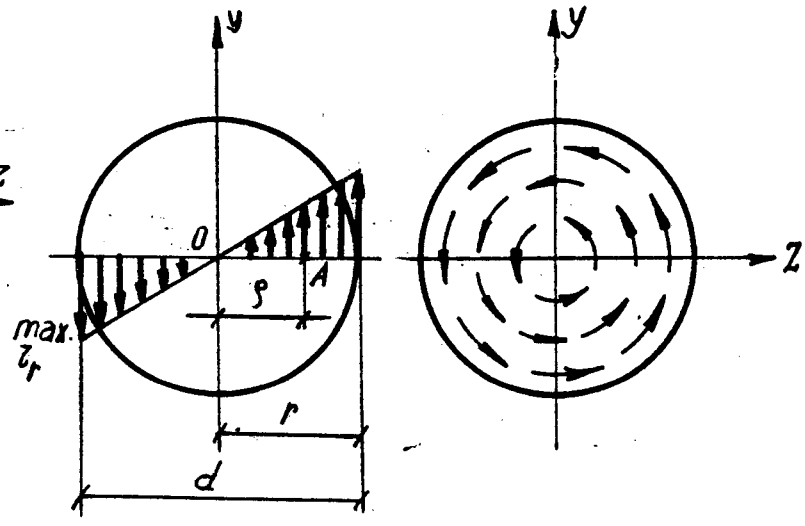


Fig. 266

Efortul " τ_r " într-un punct A, are expresia

$$\tau_r = \frac{M_r}{I_p} \cdot \rho \cdot \left(\frac{kg}{cm^2}\right)$$

unde : I_p - momentul de inerţie polar.

$$I_p = I_z + I_y = \frac{\pi d^4}{32} \ (cm^4)$$

Efortul " τ_r " maxim (pe contur, în secţiune de moment răsucitor maxim) este :

$$\tau_r^{max} = \frac{M_r^{max}}{W_p}$$

Unde : W_p - modulul de rezistenţă polar

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^3}{16} \ (cm^3)$$

Condiţia de rezistenţă devine :

$$\tau_r^{max} = \frac{M_r^{max}}{W_p} \leq \tau_{r,adm}$$

3.- Calculul secţiunilor dreptunghiulare înguste.

Caracteristicile geometrice ale secţiunii sînt:

a). momentul de inerţie la răsucire :

$$I_p = \beta \cdot b^3 \cdot h$$

Momentul de răsucire capabil pe care îl poate suporta un profil laminat, funcţie de dimensiunile sale din tabele, este:

a) pentru profile I şi U

$$M_r^{cap} = \frac{\tau_a \left[2a\, t^3 + (h - 2t)\, g^3 \right]}{3\, t} \quad (kg\ cm)$$

b). pentru profil cornier cu aripi egale,

$$M_r^{cap} = \frac{\tau_a \cdot g^2}{3} \cdot (2a - g) \quad (kg\ cm)$$

Răsucirea specifică / θ° / ml /, funcţie de momentul de răsucire (M_r)

a) pentru profile I şi U

$$\theta = \frac{3\, M_r}{G \left[2at^3 + (h-2t)\, g^3 \right]} \quad \left(\frac{rad}{cml}\right)$$

b). pentru profil cornier cu aripi egale

$$\theta = \frac{3\, r}{G\, g^3 \cdot (2a - g)} \quad \frac{rad}{cml}$$

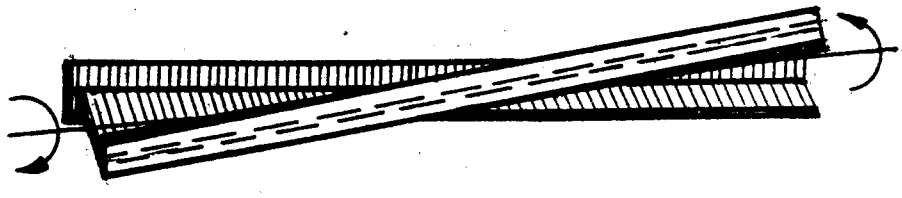


Fig. 269

Observaţie

Toate aceste formule se referă la cazul cînd avem o răsucire liberă, ca în figura alăturată, adică secţiunile normale pe axa barei sînt libere să se deplaneze. Momentul de răsucire este constant pe lungimea barei, deci şi unghiul de răsucire specific este constant pe toată lungimea barei.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad ; \quad \theta = \frac{M_r}{G \cdot I_r}$$

Dacă deplasarea este împiedicată, avem de-a face cu o răsucire neuniformă de-a lungul barei.

Momentul de răsucire capabil pe care îl poate suporta un profil laminat, funcţie de dimensiunile sale din tabele, este:

a) pentru profile I şi U

$$M_r^{cap} = \frac{\tau_a \left[2a\, t^3 + (h - 2t)\, g^3 \right]}{3\, t} \text{ (kg cm)}$$

b) pentru profil cornier cu aripi egale,

$$M_r^{cap} = \frac{\tau_a \cdot g^2}{3} \cdot (2a - g) \text{ (kg cm)}$$

Răsucirea specifică /θ°/ ml /, funcţie de momentul de răsucire (M_r)

a) pentru profile I şi U

$$\theta = \frac{3\, M_r}{G \left[2at^3 + (h-2t)\, g^3 \right]} \left(\frac{\text{rad}}{\text{cml}}\right)$$

b) pentru profil cornier cu aripi egale

$$\theta = \frac{3\, r}{G\, g^3 \cdot (2a - g)} \frac{\text{rad}}{\text{cml}}$$

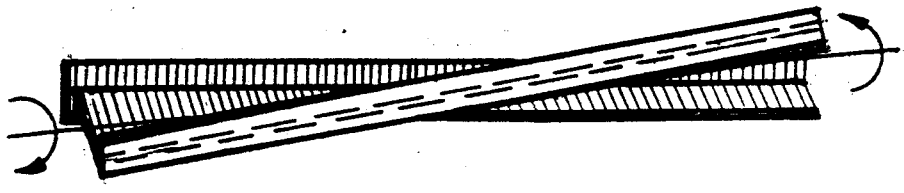


Fig. 269

Observaţie

Toate aceste formule se referă la cazul cînd avem o răsucire liberă, ca în figura alăturată, adică secţiunile normale pe axa barei sînt libere să se deplaneze. Momentul de răsucire este constant pe lungimea barei, deci şi unghiul de răsucire specifică este constant pe toată lungimea barei.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad ; \quad \theta = \frac{M_r}{G \cdot I_r}$$

Dacă deplasarea este împiedicată, avem de-a face cu o răsucire neuniformă de-a lungul barei.

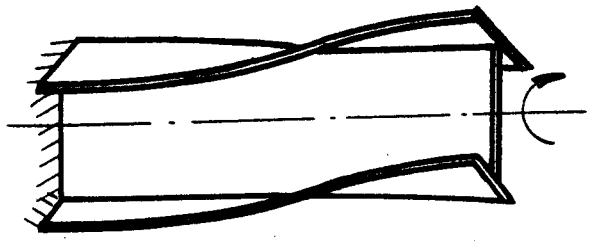


Fig. 270

Din această cauză apar şi eforturi unitare normale " σ_ω ", care modifică valorile eforturilor unitare atngenţiale şi ale unghiului de răsucire θ.

Aceste eforturi normale (σ_ω) cauzează asupra barei, un efect de încovoiere, producînd şi eforturi unitare tangenţiale (τ_ω).

La barele cu pereţi subţiri, deschise (în U sau dublu T), influenţa eforturilor normale nu mai poate fi neglijată.

5. Bare cu pereţi subţiri (răsucirea impiedicată).

Au grosimea mică faţă de dimensiunile secţiei transversale.

Ecuaţia diferenţială a răsucirii neuniforme.

Este o ecuaţie liniară, neomogenă, cu coeficienţi constanţi.

$$\varphi^{IV} - \alpha^2 \varphi'' = - \frac{m}{E\, I_\omega}$$

In care : φ - unghiul de răsucire (variabil în lungul grinzii)
moment de răsucire repartizat :

$$m = \frac{d\, M_x}{dx} \qquad M_x = M_r = + M_\omega$$

M_x - momentul de răsucire exterior total care se aplică secţiunii.

M_ω - momentul de încovoiere - răsucire.

M_r - momentul de răsucire echilibrat de eforturile unitare produse de răsucirea liberă.

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot I_r}{E \cdot I_\omega}}$$ (caracteristica elastică la încovoiere-răsucire).

Soluţia ecuaţiei diferenţiale :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi_0'}{\alpha} sh\alpha x + \frac{B_0}{GI_r}(1 - ch\alpha x) + \frac{M_{x0}}{GI_r}\left(x - \frac{sh\alpha x}{\alpha}\right) + \frac{1}{GI_r}\int_0^x \left[(x-t) - \frac{sh\alpha(x-t)}{\alpha}\right] m(t)\cdot dt$$

Parametrii φ_0 , φ_0', M_{x_0}, B_0 se determină din condiţiile de rezemare la capetele barei; funcţia m (t) rezultă din modul de solicitare a barei între extremităţi. Coeficienţii care amplifică aceşti parametrii se găsesc în tabelul 7.2.

Condiţiile de capăt, funcţie de modul de rezemare al barei, se văd în figura următoare.

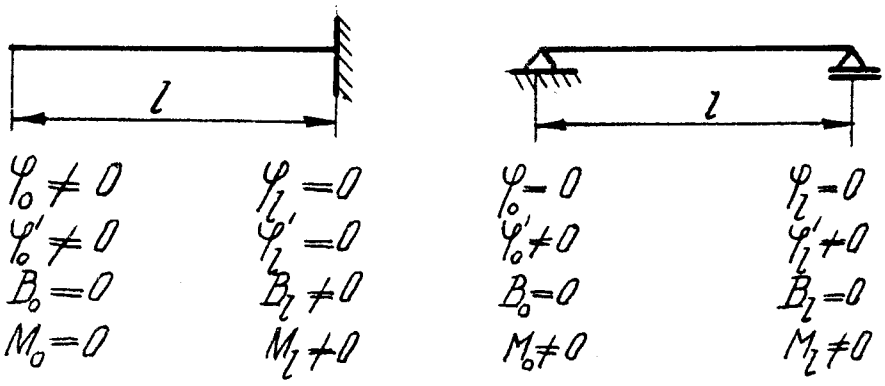

l
l
$\varphi_0 \neq 0$ $\varphi_l = 0$
$\varphi_0' \neq 0$ $\varphi_l' = 0$
$B_0 = 0$ $B_l \neq 0$
$M_0 = 0$ $M_l \neq 0$
$\varphi_0 = 0$ $\varphi_l = 0$
$\varphi_0' \neq 0$ $\varphi_l' \neq 0$
$B_0 = 0$ $B_l = 0$
$M_0 \neq 0$ $M_l \neq 0$

Fig.2?2.a

Se poate neglija rigiditatea la răsucire (GI_r) cînd produsul / αl / este mai mic decît o anumită valoare, funcţie de modul de rezemare a barei.

- bara în consolă : αl = 0,?
- bara simplu rezemată : αl 0,75
- bara simplu încastrată : αl = 1,90

Eforturile unitare sectionale pentru profile deschise, la care deplasarea este împiedicată,

a). Eforturi unitare normale.

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega}\omega \quad \left(\frac{kg}{cm^2}\right)$$

unde: B - bimomentul de încovoiere - răsucire ($kgcm^2$)

Formulele de calcul şi diagramele de variaţie ale bimomentului pentru diferite scheme de încărcare se dau în tabela 7.5.

ω - momentul de inerţie sectorial al secţiunii (cm^6)

ω - coordonata sectorială (cm^2)

Eforturi unitar normal sectorial maxim va fi (analog cu formulaviler de la barele încovoiate).

$$\sigma_\omega^{max} = \frac{B_{max}}{I_\omega}\omega_{max}$$

în punctele cele mai depărtate ale tălpilor).

Eforturi unitare tangenţiale

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{\delta \cdot I_\omega}$$ (asemănător cu formula lui Juravski

unde: M_ω - momentul de încovoiere - răsucire (kg.cm)

S_ω - momentul static sectorial (cm^4)

δ - grosimea profilului în punctul considerat (cm)

Efortul unitar tangenţial maxim va fi :

$$\tau_\omega^{max} = \frac{M_\omega^{max} \cdot S_\omega^{max}}{\delta \cdot I_\omega}$$

Analogia dintre calculul eforturilor în bara (răsucită neuniform) cu pereţi subţiri şi bara încovoiată (obişnuită), este :

Bara răsucită neuniform	Bara încovoiată
Bimoment "B"	moment încovoietor "M_z"
- Moment de încovoiere-răsucire "M_ω"	forţa tăietoare "T"
- Moment de inerţie sectorial "I_ω"	moment de inerţie axial "I_z"
- Coordonata sectorială " ω " . . .	coordonata punctului "y"

Deşi, caracteristicile geometrice sectoriale ale profilelor cu pereţi subţiri (cu răsucire împiedicată), sînt :

- suprafaţa sector " ω " ⟶ este de două ori suprafaţa descrisă de o rază vectoare care are originea într-un punct fix (pol), iar vîrful parcurge linia mediană a profilului.

- moment static sectorial ⟶ $S_\omega = \int_{(A)} \omega \cdot dA \ (cm^4)$

- moment static sectorial - liniar, calculat în raport cu polul şi axa "Oy" ⟶ $S_{\omega,y} = \int_{(A)} \omega \, y \cdot dA \ (cm^5)$
idem, în raport cu polul şi axa "Oz" ⟶ $S_{\omega,z} = \int_{(A)} \omega \cdot z \, dA \ (cm^5)$
moment de inerţie sectorial ⟶ $I_\omega = \int_{(A)} \omega^2 dA \ (cm^6)$

Expresia eforturilor unitare şi deformaţiilor se simplifică în cazul în care :

a). Axele "yoz" sînt axe centrale principale.

$$\int y dA = 0 \ ; \qquad \int z \cdot dA = 0 \ ; \qquad \int yz \, dA = 0$$

b). Polul faţă de care se calculează suprafaţa sector, satisface relaţiile :

$$\int \omega z dA = 0 \ ; \quad \int \omega y dA = 0$$

În acest caz, polul se numeşte pol principal al sectoarelor (este centru de încovoiere) şi orice forţă transversală care trece prin el, produce numai o încovoiere a barei (fără răsucire).

c). Raza vectoare origine este astfel aleasă ca :

$$\int \omega \, dA = 0$$

În cazul unei solicitări oarecare, eforturile unitare totale devin :

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{B}{I_\omega} \omega$$

$$\sigma = \frac{T_y S_z}{I_z \delta} + \frac{T_z S_y}{I_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta} + \frac{M_r}{W_r}$$

Notă: Caracteristicile sectoriale ale profilelor laminate, se găsesc date în tabelele 7.3 şi 7.4.

Solicitări compuse (RĂSUCIRE CU ÎNCOVOIERE)

Cînd avem o stare de solicitare plană (efort "σ" şi "τ" în secţiune) provenită dintr-o solicitare compusă (răsucire cu încovoiere, de ex), folosind teoriile de rupere - găsim un efort unitar ($\sigma_{echivalent}$) care să corespundă stării de distrugere respective şi care să fie echivalent distrugerii printr-o solicitare liniară.

Astfel avem :

I. Teoria efortului unitar normal maxim.

Condiţia de rezistenţă, pentru o solicitare, plană este:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}\right] \leq \sigma_{adm.}$$

sau, cînd : $\sigma_y = 0$

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \leq \sigma_a$$

Este cea mai veche teorie; ea nu corespunde suficient de bine cu realitatea.

II. Teoria deformaţiilor maxime (a eforturilor unitare reduse).

Condiţia de rezistenţă, pentru solicitarea plană:

$$\sigma_1 - M \cdot \sigma_2 \leq \sigma_a$$

Înlocuind pe M (funcţie de material), σ_1 şi σ_2 se obţine un efort unitar de comparaţie ($\sigma_{echivalent}$) a cărui expresie este (pentru oţel):

$$\sigma_{ech} = 0{,}35(\sigma_x - \sigma_y) + 0{,}65 \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

sau cînd : $\sigma_y = 0$

$$\sigma_{ech} = 0{,}35 \cdot \sigma + 0{,}65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

Această teorie se aplică în special materialului cu ruperi fragile (fonta).

III. Teoria eforturilor unitare tangenţiale maxime.

Condiţia de rezistenţă este :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

cînd : $\sigma_y = 0$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

Ea se aplică în special lemnului.

IV. Teoria cantităţii de energie de deformaţie

Condiţia de rezistenţă, dacă ţinem seama numai de lucrul mecanic de modificare a formei, este :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

In cazul cînd $\sigma_y = 0$, expresia devine :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a$$

Teoria energetică dă rezultate bune la materiale ductile (oţel).

Ea se aplică în calculul construcţiilor metalice.

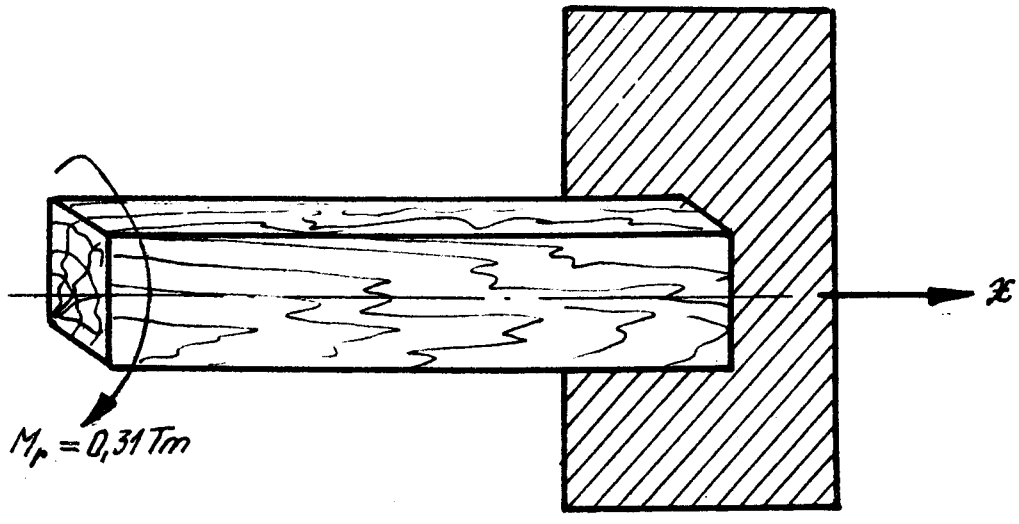


Fig. 271

7.1. O grindă de lemn (15 x 30 cm) încastrată la un capăt într-un zid - este supusă unui moment de răsucire egal cu 31.000 kg/cm .

Să se verifice grinda.

Se dă :

$$\tau_{r,a} = 20 \text{ kg/cm}^2$$
$$\theta_{adm} = 2^0/\text{ml}$$

-Calculul elementelor geometrice ale secţiunii.

a). Modul de rezistenţă la răsucire (W_r)

Raportul $\frac{h}{b} = \frac{30}{15} = 1,50 \longrightarrow \alpha_h = 0,231$ (tabelul 7.1)

$\alpha_b = 0,270$ "

Deci,

$W_{r,M} = 0,231 \times 15^2 \times 30 = 1.580\ cm^3$

$W_{r,N} = 0,270 \times 15^2 \times 30 = 1.830\ cm^3$

b). Momentul de inerţie la răsucire (I_r)

Raportul $\frac{h}{b} = 1.50 \longrightarrow \beta = 0,196$

Deci, $I_r = \beta . b^3 . h = 0,196 \times 15^3 \times 30 = 20.000\ cm^4$

Verificarea la rezistenţă. în punctul cel mai solicitat (M).

Diagrama de moment - răsucire este consantă şi egală cu 0,31 T.m.

$$\tau_r^{max} = \frac{M_r}{W_{r,M}} = \frac{31.000}{1.580} = 19,60\ \frac{kg}{cm^2} < \tau_a .$$

Condiţia de rezistenţă este îndeplinită.

- După cum s-a arătat pe mijlocul (N) al laturii scurte (b) - efortul " τ_r " are o valoare mai mică.

$$\tau_{r,N} = \frac{31.000}{1.830} = 17\ \frac{KG}{cm^2}$$

Deci, nu ar mai fi necesară verificarea şi în acest punct.

Verificarea la deformaţie.

$\theta_{max} < \theta_{adm}$

$\theta_{max} = \frac{31.000}{5.500 \times 20.000} = 0,000281\ rad/cm = 0,0281\ rad/ml$

$\theta_a = 2 \times 0,0175 = 0,035\ rad/ml$

Pentru că: 1 grad $= \frac{\pi}{180} = ,0175$ radiani

Si condiţia de deformaţie este îndeplinită. Bara poate prelua momentul de răsucire dat în bune condiţii.

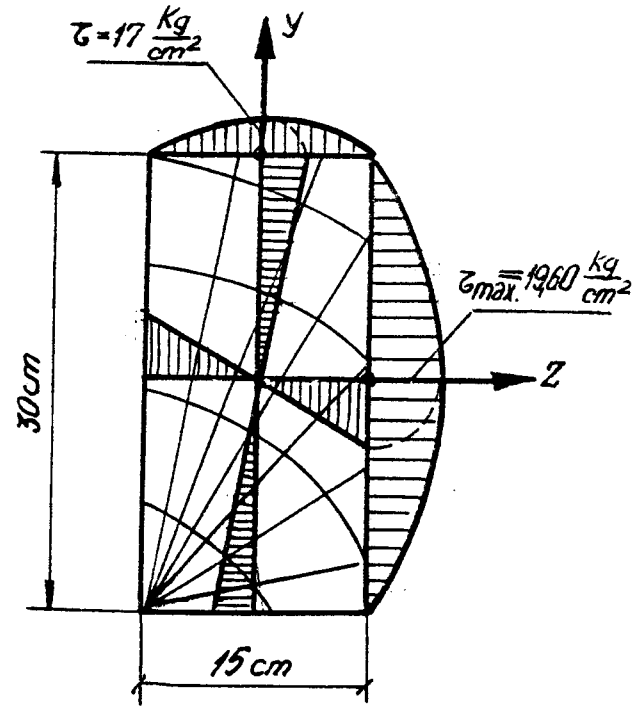


Fig. 272

7.2. Să se calculeze momentul de inerţie şi modulul minim de rezistenţă la răsucire al secţiunii din figura 273.

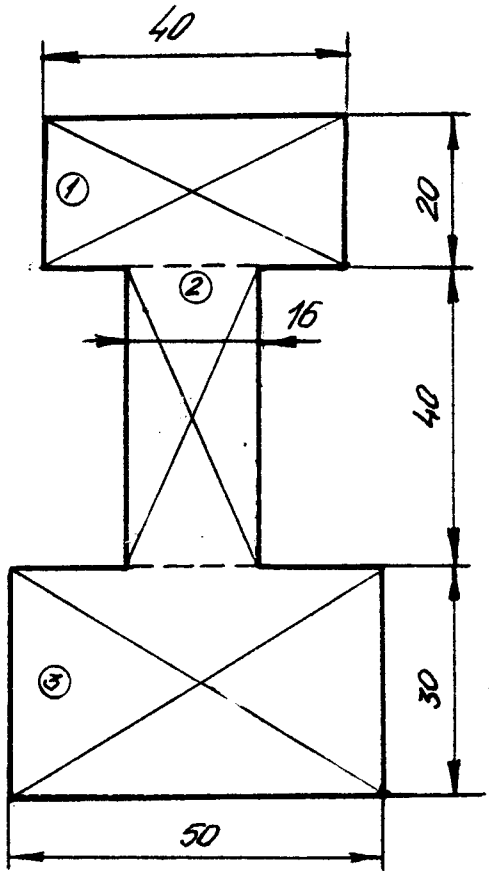


Fig.273

Descompunem figura în 3 dreptunghiuri (1, 2, 3).

Pentru o suprafaţă alcătuită din dreptunghiuri, la care raportul laturilor respective nu depăşeşte 10 ($\frac{h_i}{b_i} < 10$), caracteristicile geometrice ale secţiunii se pot calcula cu formula :

$$I_r = \sum_n \beta_i \times b_i^3 \times h_i \ (cm^4)$$

respectiv,

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{\left(\frac{I_{r,i}}{W_{r,i}}\right)_{max}} \ (cm^3)$$

Momentul de inerţie la răsucire

In cazul nostru:

1.- pentru dreptunghiul (1):

$$\frac{h_1}{b_i} = \frac{40}{20} = 2 \longrightarrow \beta_1 = 0,229$$

2.- pentru dreptunghiul (2)

$$\frac{h_2}{b_2} = \frac{40}{16} = 2,5 \longrightarrow \beta_2 = 0,249$$

3.- Pentru dreptunghiul (3)

$$\frac{h_3}{b_3} = \frac{50}{30} = 1,67 \longrightarrow \beta_3 \cong 0,208 \text{ (prin interpolare)}$$

Deci,

$I_r = 0,229 \times 20^3 \times 40 + 0,249 \times 16^3 \times 40 + 0,208 \times 30^3 \times 50 = 73.200 + 40.800 + 281.000 = 395.000 \ cm^4$

Modulul de rezistenţă

In cazul nostru, $\left(\frac{I_{r,i}}{W_{r,i}}\right)_{max} \longrightarrow \frac{I_{r,3}}{W_{r,3}} = \frac{\beta_3 \cdot b_3^3 \cdot h_3}{\alpha_{h3} \cdot b_3^2 \cdot h_3} = \frac{\beta_3}{\alpha_{h_3}} \cdot b_3$

Am ales coeficientul α_{h_3} pentru că : $\alpha_{h_3} < \alpha_{b_3}$ şi obţinem un ($W_{r,3}$) minim - care ne dă o valoare a fracţiei maximă.

$\beta_3 \cong 0,208$

Din tabela ..., scoatem pe α_{h_3} (prin interpolare)

$$\alpha_{h3} \cong 0,256$$

Deci,

$$\frac{x,5}{W_{r,5}} = \frac{0,208}{0,236} \times 30 = 26,5 \text{ cm}$$

$$W_r^{min} = \frac{395.000}{26,5} = 14,950 \text{ cm}^3$$

Observaţie :

Modulul minim de rezistenţă la torsiune se mai poate calcula aproximativ cu formula :

$$W_r^{min} = \frac{I_p}{b_{max}} \ (cm^3)$$

In cazul nostru

$$W_r^{min} \simeq \frac{395.000}{30} = 13,157 \text{ cm}^3$$

Rezultă o acoperire de circa 6% pentru calculul efortului de răsucire (τ_r^{max}).

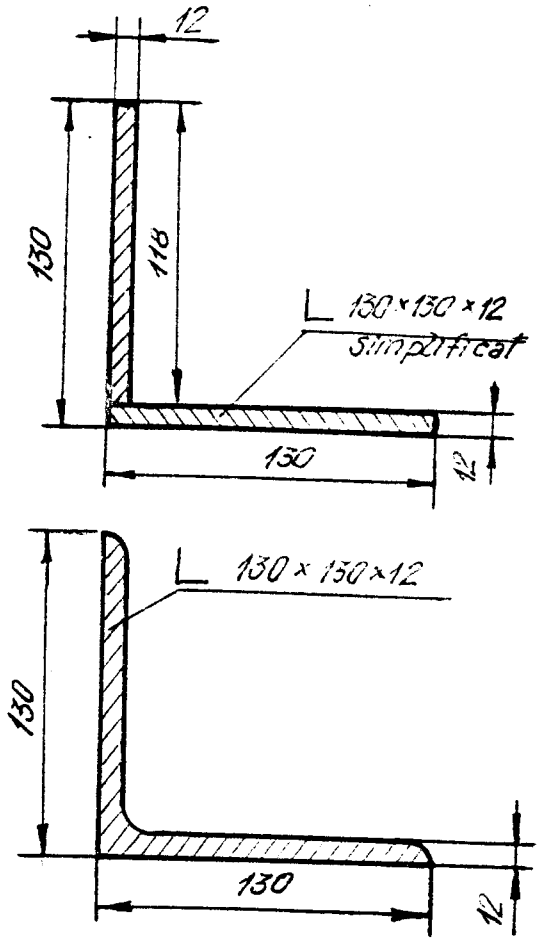


Fig. 274

7.3. Să se calculeze momentul de inerţie şi modulul de rezistenţă la răsucire al unui profil - cornier 130 x 13 x 12 în mod:

1.- **aproximativ - fără a ţine ne seama de rotunjimea muchiilor**

2.- **exact - ţinînd seama de rotunjirea muchiilor**

3.- **momentul de răsucire capabil** (M_r^{θ})

Se dă :

$$\tau_{r,a} = 960 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\theta_a = 1^{\circ}/ml$$

1. In mod simplificat, putem considera profilul-cornier L 130 x 130 x 12) - compus din două dreptunghiuri:
12 x 118 şi 12 x 130

Calculăm caracteristicile geometrice la răsucire ale profilului cornier simplificat (compus dintr-o serie de dreptunghiuri <u>înguste</u> fără a ţine seama de rotunjirea muchiilor) cu formulele :

$$I_r = \frac{1,2^3 \times 11,8 + 1,2^3 \times 13}{3} = 14,50 \text{ cm}^4$$

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{b_{max}} = \frac{14,50}{1,20} = 12,10 \text{ cm}^3$$

Modulul de rezistenţă minim la răsucire se produce la mijlocul laturilor lungi.

2.- Vom calcula aceleaşi caracteristici la răsucire-exact- ţinînd seama şi de coeficientul de profil " η ". Considerăm corniera compusă din aceleaşi dreptunghiuri (12 x 118 - resp. 12 x 130).

<u>Deci.</u>

$$I_r = \eta \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i^3 . h_i}{3} = 0,99 \times \frac{1,2^3 \times 11,8 + 1,2^3 \times 13}{3} = 14,40 \text{ cm}^4$$

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{b_{max}} = \frac{14.40}{1,20} = 12,00 \text{ cm}^3$$

Practic, metoda de calcul diferă numai prin introducerea coeficientul de profil " η ".

3.- Momentul de răsucire capabil al cornierei rezultă din cele două condiţii.

a). condiţia de rezistenţă

$$M_r^c = \frac{\tau_a \cdot g. (2a - g)}{3} ;$$

In cazul nostru: g = 12 mm şi a = 130 mm

Rezultă,

$$M_r^c = \frac{960 \times 1,2^2 \times (26-1,2)}{3} \simeq 11,440 \text{ kg/cm}$$

b). Condiţia de deformaţie

$$M_r^c = \frac{\theta \cdot G . g^3 (2a-g)}{3} ,$$

In cazul de faţă :

$$\theta = 1^0/\text{ml} = \frac{1}{5.700} \frac{\text{rad}}{\text{cml}} = 0,000176 \frac{\text{rad}}{\text{cml}}$$

Deci,

$$M_r^c = \frac{0,000176 \times 810.000 \times 1,2^3 \times (26-1,2)}{3} = 2.040 \text{ kg/cm}$$

Alegem momentul capabil minim (lucrăm acoperitor), din condiţia de deformaţie.

7.4.- Să se calculeze momentul de inerţie şi modulul de rezistenţă minim la răsucire al unui profil laminat I 30.

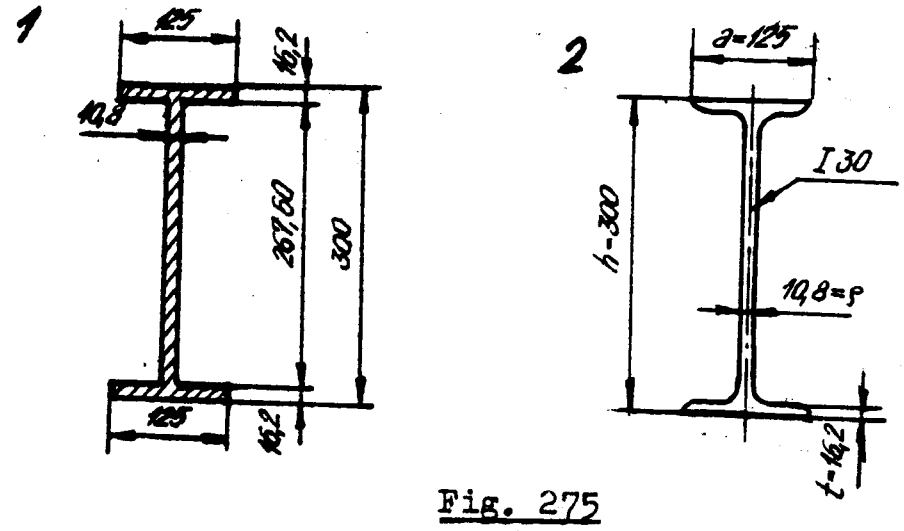


Fig. 275

1.- Aproximativ, fără a ţine seama de rotunjirea muchiilor.

2.- ţinînd seama de rotunjirea muchiilor.

3.- momentul de răsucire capabil al profilului.

Se dă : $\tau_{r,a.} = 960 \frac{kg}{cm^2}$

$\theta_a = (\frac{1}{2})^{o}/_{ml}$

1. Scoatem din tabela STAS 565-49, dimensiunile principale ale profilului I 30 şi-l aproximăm cu o secţiune compusă din 3 dreptunghiuri [(16,2x125)x2 şi 10,8x267,6] .(fig.de mai sus).

Calculul aproximativ al caracteristicilor geometrice la răsucire îl facem cu formula :

$$I_r = \frac{2 \times 1,62^3 \times 12,5 + 1,08^3 \times 26,76}{3} = \frac{106,1 + 33,7}{3} =$$

$$= 46,63 \text{ cm}^4$$

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{b_{max}} = \frac{46,60}{1,62} = 28,90 \text{ cm}^3$$

2.- Pentru a face calculul exact - aplicăm corecţia corespunzătoare formei secţiunii (profil I) cu ajutorul coeficientului de profil $\eta = 1,20$. Considerăm profilul compus din aceleaşi dreptunghiuri (2 x 16,2 x 125 şi 10,3 x 267,6).

Deci,

$$I_r = 1,20 \times \frac{2x1,62^3x12,5+1,08^3x2676}{3} = 1,20x46,63 = 56 \text{ cm}^4$$

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{b_{max}} = \frac{56}{1,26} = 34,60 \text{ cm}^3$$

3.- Momentul de răsucire capabil al profilului I 30 se calculează din 2 condiţii:

a). Din condiţia de rezistenţă

$$M_r = \frac{\sigma_a \left[2at + (h-3t)\, g^3 \right]}{3t} ;$$

In cazul nostru,

$$M_r = \frac{960\ (2x12{,}5 \times 1{,}62^3 + 26{,}76x1{,}08^3)}{3 \times 1{,}62} \cong 27{,}\ldots \text{ kgcm}$$

b). Din condiţia de deformaţie

Răsucirea specifică " θ " admisibilă este $(\frac{1}{2})^0/_{ml}$

$$\theta \ldots /_{ml} = \frac{0{,}5 \times \frac{1}{57}}{100\ cml} = 0{,}000088\ \frac{rad}{cml}$$

Momentul de răsucire maxim, funcţie de " θ ", este:

$$M_r = \frac{\theta \ldots \left[2at^3 + (h-2t).g^3 \right]}{3}$$

In cazul nostru :

$$M_r = \frac{0{,}88x810{,}000(2x12{,}5x1{,}62^3+26{,}76x1{,}08^3)x10^{-4}}{3} = 5.\ldots \text{ kg/cm}$$

Condiţia de deformaţie este foarte severă.

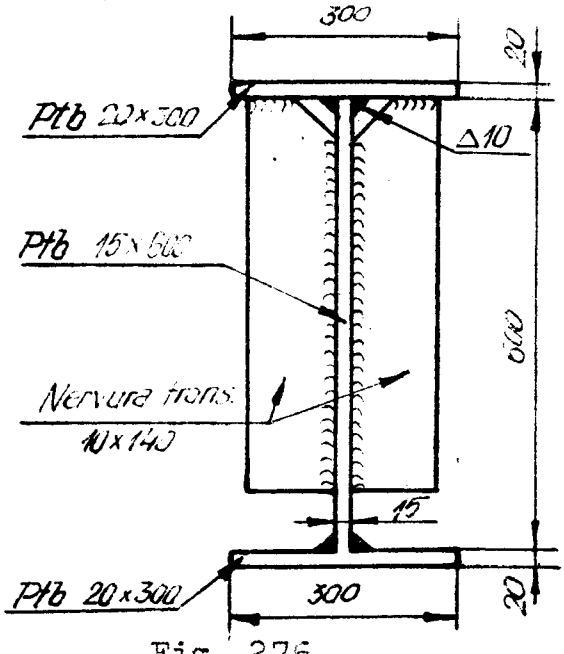


Fig. 276

7.5.- Să se calculeze momentul de inerţie şi modulul de rezistenţă minim la răsucire al unei grinzi metalice cu inimă plină, sudată - ca în figură.

Avem o secţiune compusă din platbenzi sudate, rigiditate cu nervuri transversale sudate.

Coeficientul " η " are valoarea: $\eta = 1{,}5$

Pentru o secţiune compusă din platbenzi, asamblate prin nituire coeficientul " η " este :

$$\eta = 0{,}5$$

In cazul nostru - secţiunea compusă din trei dreptunghiuri sudate 2 x 20 x 7... - respectiv 15 x 6... ,

$$\eta = 1{,}5$$

Deci, $I_r = \eta \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i^3 \times h}{3} = 1,5 \times \frac{2x2^3x30+1,5^3x60}{3} = 1,5 \times \frac{480+203}{3} =$

$= 1,5 \times (160 + 67,7) = 341 \text{ cm}^4$

$W_r^{min} = \frac{I_r}{b_{max}} = \frac{341}{2} \simeq 171 \text{ cm}^3$

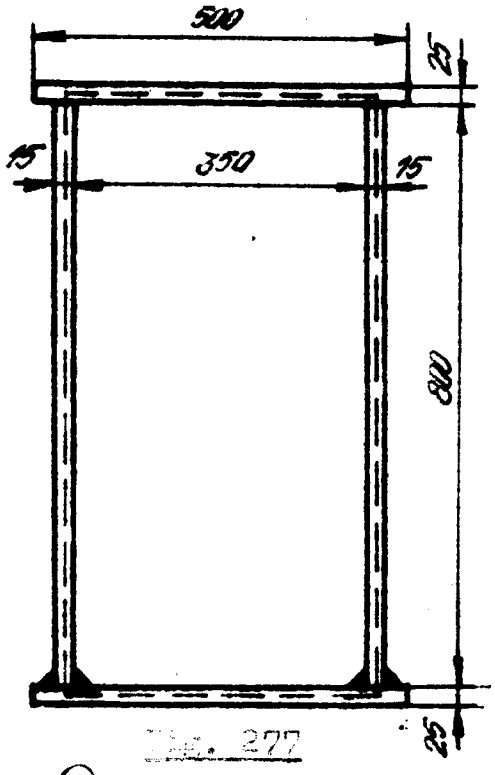


Fig. 277

7.6.- Să se calculeze caracteristicile geometrice la răsucire ale grinzii metalice sudate, închise în formă de cheson din figură

-Momentul de inerție la răsucire

In cazul acestei grinzi cheson - care este o secțiune dublu conexă, de grosime variabilă (15 respectiv 25 mm), calculul se face cu formula :

$$I_r = \eta \cdot \frac{4 \cdot \Omega}{\int_0^S \frac{ds}{\delta}}$$

Unde Ω - suprafața închisă de linia mediană a secțiunii

$\Omega = 36,5 \times 82,5 = 3010 \text{ cm}^2$

$\int_0^S \frac{ds}{\delta}$ - suma lungimilor liniei mediane, raportate la grosimea fiecăreia.

$\int_0^S \frac{ds}{\delta} = 2 \times \frac{36,5}{2,5} + 2 \times \frac{82,5}{1,5} = 292 + 110 = 139,2$

Observăm că momentul de inerție la răsucire va crește dacă vom alege inima cu grosime mare (ceea ce nu era cazul la încovoiere, unde concentrăm materialul în tălpi).

deoarece $\int_0^S \frac{ds}{\delta}$ scade, deci, I_r crește !

η - coeficientul de profil

$\eta = 1 \rightarrow$ grinzi - cheson asamblate prin sudură

$\eta = 0,3 \rightarrow$ grinzi - cheson asamblate prin nituire.

deci,

$$I_r = 1 \times \frac{4 \times 3.010^2}{139,2} = 261.000$$

- Modulul de rezistență la răsucire

In cazul grinzilor cheson; are expresia :

$$W_r^{min} = \eta \cdot 2 \cdot \Omega \cdot \delta_{min}$$

Unde :

$\eta = 1.$

$\delta_{min} = 1,5$ (grosime minimă)

In cazul nostru,

$W_r^{min} = 1,2 \times 3,010 \times 1,5 = 9.030 \text{ cm}^3$

Aceiaşi observaţie ca mai sus.

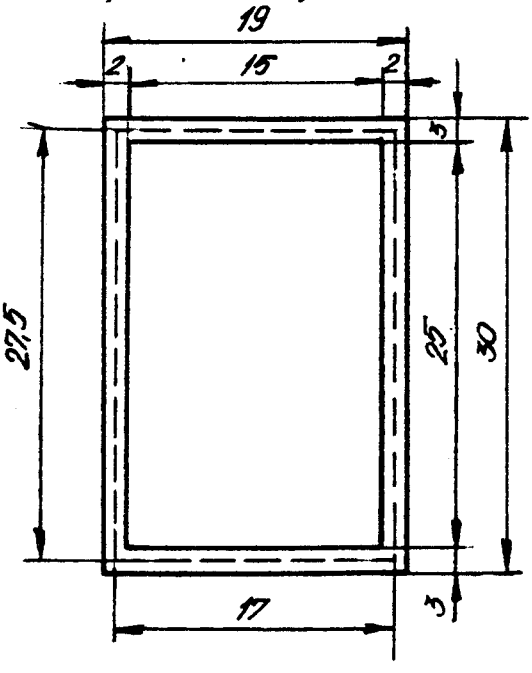


Fig. 278

7.7.- 1). Să se calculeze caracteristicile geometrice la răsucire ale unei secţiuni tubulare, cu pereţi subţiri, de grosime variabilă.

2). Să se compare rezultatele cu acelea obţinute în cazul cînd practicăm o tăietură radială în tub.

3). Să se calculeze aceleaşi caracteristici şi în cazul în care secţiunea ar fi complet plină (fără goluri), din figura 278.

1.- Secţiunea este complet închisă (dublu conexă), cu pereţi subţiri, de grosime variabilă, (ca mai sus).

momentul de inerţie la răsucire:

$$I_r = \frac{4 \times \Omega^2}{\int_0^S \frac{dS}{\delta}} \cdot \quad (\text{cm}^4)$$

Unde : Ω - suprafaţa închisă de linie mediană a secţiunii

$\Omega = 17 \times 27,5 = 466^2$

S - lungimea conturului liniei mediane

δ - grosimea secţiunii de-a lungul conturului

$$\int_0^S \frac{dS}{\delta} = \frac{27,5 + 27,5}{2} + \frac{17}{2} + \frac{17}{3} = 41,67 \text{ (adimensional)}$$

Deci,

$$I_r = \frac{4 \times 466^2}{41,67} = 21.100 \text{ cm}^4$$

Modul de rezistenţă minim la răsucire :

$$W_r = 2 \times \Omega \times \delta_{min} \ (cm^3)$$

$$\delta_{min} = 2 \text{ cm}$$

Deci,

$$W_r^{min} = 2 \times 466 \times 2 = 1.864 \ cm^3$$

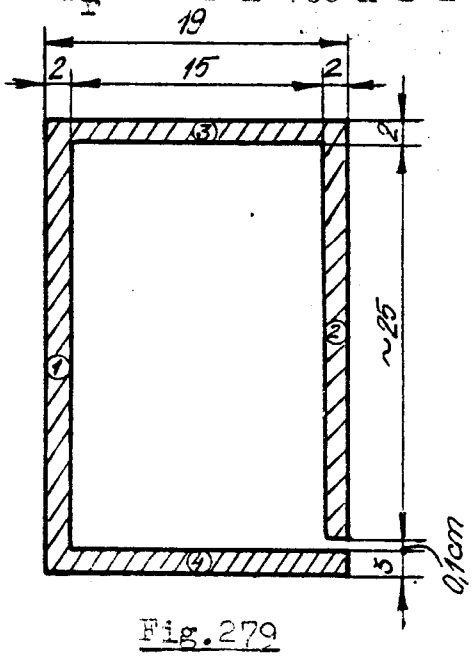


Fig.279

2.- In cazul în care practicăm o tăietură (0,1 cm) - transformăm secţiunea închisă (dublu convexă) într-o secţiune simplu conexă alcătuită din 4 dreptunghiuri înguste.

Cel mai mic raport

$\frac{h_i}{b_i}$ este $\frac{19}{3} = 6,33$

Dreptunghiurile se pot considera înguste (şi calcula în consecinţă) în cazul cînd raportul: $\frac{h_i}{b_i} \geqslant 10$.

Pentru dreptunghiul (4) vom calcula, deci - cu o eroare de circa 9%.

Momentul de inerţie la răsucire

$$I_r = 2 \times \frac{2^3 \times 25}{3} + \frac{2^3 \times 19}{3} + \frac{3^3 \times 19}{3} = 133 + 50,8 +$$

$$+ 171 = 354,80 \ cm^4$$

Modulul de rezistenţă minim la răsucire

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{b_{max}} = \frac{354,80}{3} = 118,27 \ cm^3$$

Concluzie :

Secţiunea deschisă (crestată) lucrează f.defavorabil la răsucire - faţă de aceiaşi secţiune netăiată. Astfel,

$$\frac{W_r^{intreg}}{W_r^{tăiat}} = \frac{21.100}{354,80} = 60 \text{ ori}$$

$$\frac{W_r^{min.\ intreg}}{W_r^{min.\ tăiat}} = \frac{1.864}{118,27} = 16 \text{ ori}$$

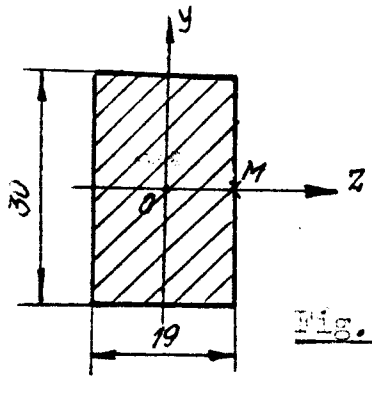


Fig.280

3.- Pentru aceeaşi secţiune dreptunghiulară (19 x 30 cm), dar fără goluri de interior (15 x 25 cm) - caracteristicile geometrice la răsucire sînt:

- Momentul de inerţie la răsucire :

$$I_r = \beta . b^3 h \qquad (cm^4)$$

Unde, $\frac{h}{b} = \frac{30}{19} = 1,58$

Din tabela 7.1. se scoate $\beta = 1,9657$ (prin interpolare)

Deci,

$$I_r = 1,9657 \times 19^3 \times 30 = 405.000 \ cm^4$$

- Modulul de rezistenţă minim la răsucire

$$W_r^{min} = W_{r,M} = \alpha_h . b^2 . h \qquad (cm^3)$$

Pentru : $\frac{h}{b} = 1,58 \longrightarrow \alpha_h = 0,23356$. (din tabela 7.1. prin interpolare)

Deci,

$$W_r^{min} = 0,23356 \times 19^2 \times 50 = 2.520 \ cm^3$$

Concluzie :

Secţiunea dreptunghiulară fără gol şi cu gol în ea are aproximativ acelaş modul minim de rezistenţă la răsucire.

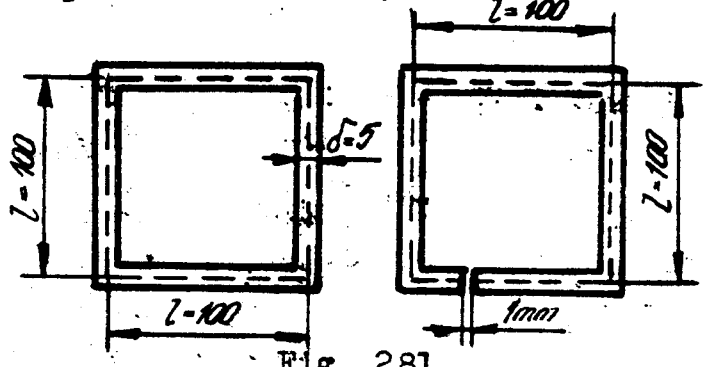


Fig. 281

7.8. Să se calculeze rotirea specifică produsă de un moment $M_r = 0,4$. Tm. unei secţiuni tubulare metalice cu pereţi subţiri de grosime constantă, conform figurii, în două ipoteze :

1.- Secţiunea este complet închisă

2.- In secţiune se practică o crestătură.

1.- Avem de-a face cu un profil cu pereţi subţiri închis dublu conex (N); în acest caz - răsucirea specifică " θ " are expresia :

$$\theta_{/cml} = \frac{M_r \cdot S}{4 . G \Omega^2 \delta} . \quad (rad)$$

Unde: M - momentul de răsucire care produce deformaţia (kg/cm)

La noi, $M_r = 40.000$ kg/cm

S - lungimea conturului median

La noi: $S = 4\ l = 4 \times 10 = 40$ cm

G - modul de elasticitate transversal ($\frac{kg}{cm^2}$)

pentru oţel, $G = 810.000\ \frac{kg}{cm^2}$

Ω^2 - pătratul ariei mărginite de conturul median (cm^4)

La noi: $\Omega^2 = (10 \times 10)^2 = 10.000\ cm^2$

δ - grosimea profilului (cm)

La noi: $\delta = 0,5$ cm

Deci, calculînd pentru un metru liniar,

$$\theta/_{ml} = \frac{40.000 \times 40}{4 \times 810.000 \times 10.000 \times 0,5} = 100 = 0,01 \text{ radiani}$$

Transformăm în grade:

$$\theta/_{ml} = 0,01 \times 57^0 = 34;$$

2.- Dacă în profilul tubular se practică o crestătură, se transformă într-un profil cu pereţi subţiri deschis, (simplu conex).

Răsucirea specifică are expresia:

$$\theta/_{cml} = \frac{M_r}{G.I_r} \text{ (radiani)}$$

Unde, M_r - momentul de răsucire care produce deformaţia (kg/cm)

La noi, $M = 40.000$ kg/cm

$G = 810.000\ \frac{kg}{cm^2}$

I_r - momentul de inerţie la răsucire al profilului (cm^4)

$$I_r = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} b_i^3 \cdot h_i$$

La noi,

$$I_r = \frac{1}{3} \times 4\ \delta^3 \times l = \frac{1}{3} \times 4 \times 0,5^3 \times 10 = 1,66\ cm^4$$

Deci, pentru un metru liniar :

$$\theta/_{ml} = \frac{40.000}{810.000 \times 1,66} \times 100 = 2,97 \text{ radiani}$$

Tranformăm în grade :

$$\theta/_{ml} = 2,97 \times 57^0 = 170^0$$

Se observă că rotirea specifică la torsiune a profilului deschis este mult mai mare decît a celui închis.

Concluzia este că primul profil este mult mai rigid, trebuiesc evitate crestături în secţiune.

deci

7.9.- O bară de secţiune inelară de grosimea δ =2 cm este supusă la un moment de răsucire: M_r = 0,5 Tm

Să se afle eforturile unitare maxime în 2 ipoteze :

1. bara are secţiunea inelară continuă.
2. bara are secţiunea inelară crestată.

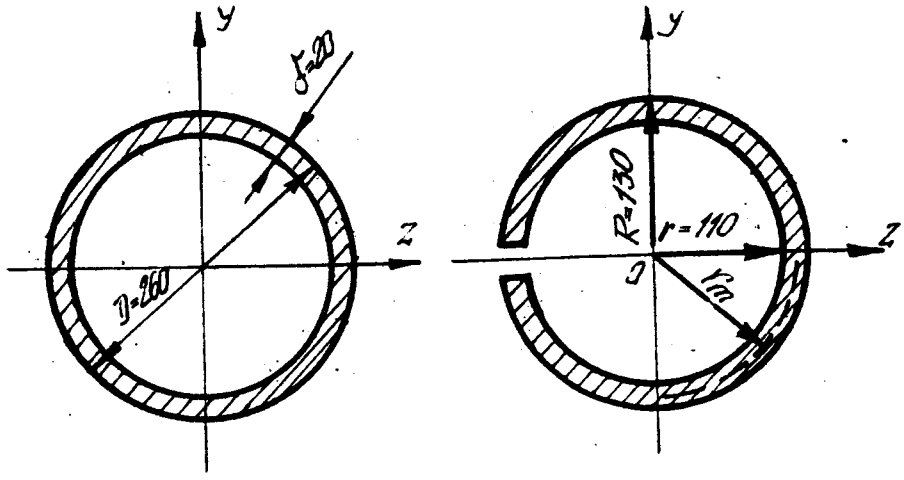


Fig. 282

Metoda I de rezolvare

1. In cazul barei cu secţiune inelară continuă, efortul unitar " τ_{max} " de răsucire, are expresia :

$$\tau_{r,max} = \frac{M_r}{W_p} \left(\frac{kg}{cm^2}\right)$$

unde: M_r = 0,5 Tm = 50.000 kg/cm

$$W_p = \frac{3,14 \times (26^4 - 22^4)}{16 \times 26} = 1.680 \text{ cm}^3$$

Deci, $$\tau_{max} = \frac{50000}{1.680} = 29.8 \text{ kg/cm}^2$$

2. In cazul barei cu secţiune inelară crestată, efortul unitar " τ_{max} " de răsucire, are expresia :

$$\tau_{max} = \frac{M_r}{W_d} \left(\frac{kg}{cm^2}\right)$$

unde, $$W_d = \frac{(2\pi r \delta)^2}{6\pi r + 1,8\delta} = \frac{(2 \times 3,14 \times 11 \times 2)^2}{6 \times 3,14 \times 11 + 1,8 \times 2} = 90 \text{ cm}^3$$

Deci, $$\tau_{max} = \frac{50.000}{90} = 555 \frac{kg}{cm^2}$$

In concl2ie, secţiunea inelară necrestată rezistă mult mai bine la răsucire (în cazul nostru de circa 18,7 ori mai mult) decît cea crestată.

Metoda II de rezolvare

1.- Secţiunea inelară continuă este o secţiune circulară dublu conexă cu pereţi subţiri, de grosime constantă (δ = 2 cm)

- Calculăm momentul de inerţie la răsucire cu formula :

$$I_r = \frac{4 \cdot \Omega^2 \cdot \delta}{S} \quad (cm^4)$$

unde, Ω - suprafaţa închisă de conturul median al secţiunii (D_m = 240 mm)

δ - grosimea peretelui (δ = 20 mm)

S - lungimea conturului suprafeţei mediane (S = 2 x 3,14 x 12 = 75 cm)

Făcînd simplificările respective, obţinem

$$I_r = \frac{4 \times (\pi r_m^2)^2 \times \delta}{2 \pi r_m} = 2 \pi r_m^3 \delta \quad (cm^4)$$

In cazul nostru,

$I_r = 2 \times 3,14 \times 12^3 \times 2 = 22.000 \ cm^4$

Modulul de rezistenţă minim la răsucire :

$W_r^{min} = 2 \cdot \Omega \cdot \delta \cdot \ (cm^3)$

In cazul nostru,

$W_r^{min} = 2 \times 3,14 \times 12^2 = 1800 \ cm^3$

Rezultatul este apropiat de cel obţinut prin metoda I (diferenţă de circa 5%)

$$\tau_{max} = \frac{50.000}{1.800} = 28 \ \frac{kg}{cm^2}$$

2.- Dacă practicăm o tăietură, longitudinală în ţeavă - atunci caracteristicile geometrice la răsucire scad f.mult, cu toate că materialul folosit rămîne practic acelaşi. Efortul unitar de bară creşte de zeci de ori (vezi rezultatul în cazul metodei I de rezolvare).

Prin creşterea secţiunii inelare - aceasta devine o figură simplu conexă (şi nu dublu conexă ca în primul caz). O putem considera un dreptunghi îngust, de lungime $2 \pi r_m$ şi lăţime δ.

Deci,

$I_r = \frac{1}{3} \times \delta^3 \times 2 \pi r_m = \frac{1}{3} \times 2^3 \times 2 \times 3,14 \times 12 = 185 \ cm^4$

$W_r^{min} = \frac{185}{2} \cong 92 \ cm^3$

Rezultatul este foarte apropiat de cel obţinut prin metoda I.

$$\tau_{max} = \frac{50.000}{92} = 545 \frac{kg}{cm^2}$$

Concluzia este că profilele închise sînt mult mai avantajoase la răsucire.

7.10.- Arborele unei maşini transmite o putere de 500 C.P. sub o turaţie de 1.200 rot/min. Stiind că rezistenţa admisibilă este : $\tau_a = 350 \frac{kg}{cm^2}$, să se dimensioneze arborele.

Cînd se dă puterea (N) şi turaţia sa (n), momentul de răsucire (M_r) este :

$$M_r \text{ (kg.cm)} = 71.620 \frac{N \text{ (C P)}}{n \text{(rot/min)}}$$

In cazul nostru,

$$M_r = 71.620 \cdot \frac{500}{1200} = 29.840 \text{ Kg/cm}$$

Modulul de rezistenţă polar necesar este :

$$W_{p\ nec} = \frac{M_r}{\tau_a} = \frac{29.840}{350} = 85,2 \text{ cm}^3$$

Dimensionăm :

$$\frac{\pi d^3}{16} = 85,2$$

$$\underline{d = 75 \text{ mm}}$$

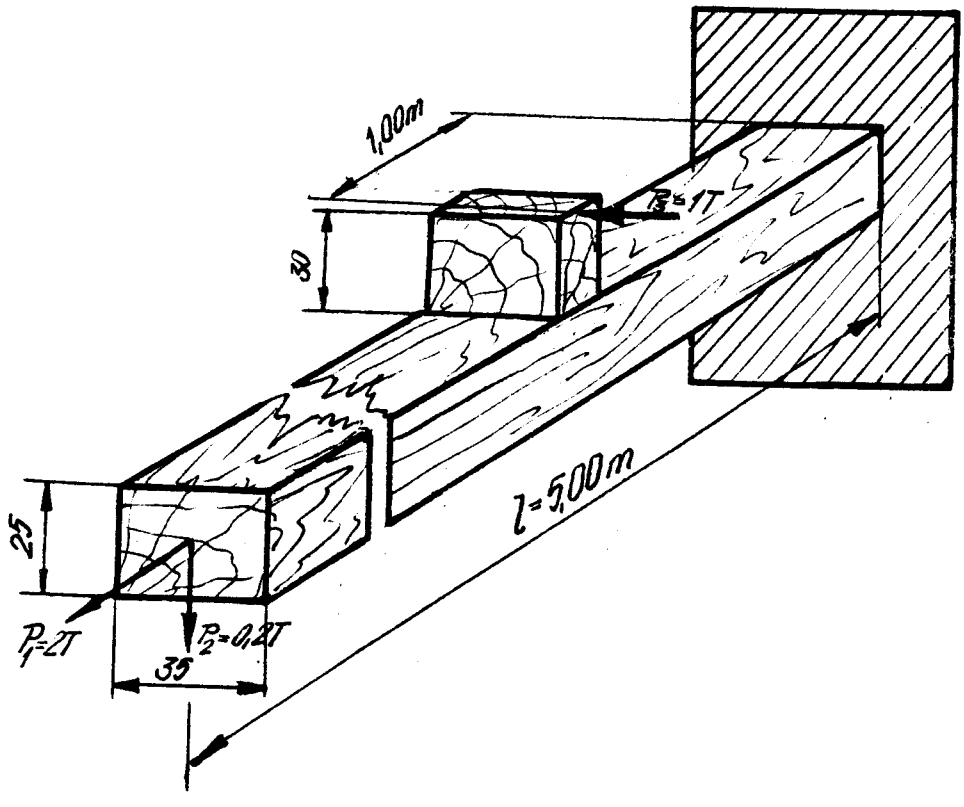


Fig. 7.3

7 11. Să se verifice grinda de lemn din figură.

Secţiunea periculoasă este secţiunea de încastrare a grinzii în perete. Aici apar următoarele eforturi unitare:

a. Tensiune pură ($+\sigma_x^1$), produsă de forţa axială (P_1).

b. Tensiune şi compresiune ($+\sigma_x^2$; $-\sigma_x^2$), din încovoiere produsă de forţa P_2; idem pentru forţa P_3.

c. de răsucire (τ_r) din răsucire produsă de forţa P_3.

d. de forfecare (τ_{xz} şi τ_{xy}) după două direcţii (oz şi oy), produse de forţele tăietătoare T_z - respectiv T_2. ($P_2 = T_2$; $P_3 = T_z$).

Valoarea acestor eforturi unitare o aflăm cu formulele următoare :

a. $$\sigma_x^1 = + \frac{P_1}{A} \quad (\frac{kg}{cm^2})$$

b. $$\sigma_x^2 = \pm \frac{M_z}{W_z}$$; respectiv $$\sigma_x^3 = \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (\frac{kg}{cm^2})$$

c. $$\tau_r = \frac{M_r^{max}}{W_r^{min}} \quad (\frac{kg}{cm^2})$$

d. $$\tau_{xz} = \frac{T_3 \times S_y}{b \times I_y}$$ respectiv $$\tau_{xy} = \frac{T_2 \times S_z}{h \times I_z} \quad (\frac{kg}{cm^2})$$

Variaţia acestor eforturi unitare, în acţiune, este arătată în figura care urmează

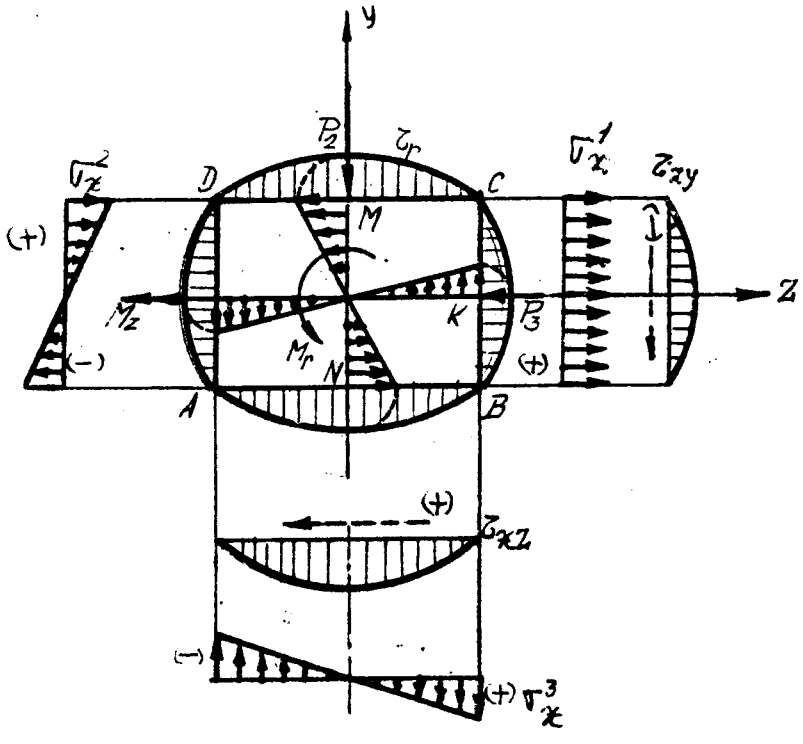


Fig. 284

In punctele unde aceste eforturi unitare se suprapun, le vom compune conform cu una din teoriile de rupere.

- Se observă că fibrele extreme ale grinzii (AB şi CD) sînt cele mai solicitate. Aici eforturile σ_x (din întindere şi încovoiere) şi τ_r (din răsucire).

Punctul cel mai solicitat este punctul M, unde eforturile σ_x^1 şi σ_x^2 sînt de acelaş semn (tensiunea) şi se mai adaugă în plus efortul τ_r^{max} şi τ_{xz}.

Efortul de forfecare (τ_{xy}, τ_{xz}) este nul la extremităţi şi maxim la axa neutră.

Intr-un punct K (de exemplu), eforzurile σ_x^2 şi τ_{xz} sînt nule; τ_r şi τ_{xy} sînt relativ mici faţă de σ şi de semn contrar; rămîne efortul unitar σ_x^1 şi σ_x^3.

Deci, vom verifica grinda în punctul M conform ipotezei de rupere a efortului unitar " τ " maxim.

Adică,

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + 4(\tau_r)^2} \leq \sigma_a = 100 \frac{kg}{cm^2}$$

a). şi b). Calculul efortului σ_x ($\sigma_x^3 = 0$).

$$\sigma_x^1 = +\frac{2.000}{25x35} = +2,3 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_x^2 = \pm \frac{200 \times 500}{\frac{35 \times 25^2}{6}} = \pm \frac{100000}{3.650} = \pm 27,4 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_x = +2,3 + 27,4 = +29,7 \frac{kg}{cm^2} \text{ (pe fibra CD)}$$

c). - Calculul efortului τ_r^{max} (în punctul M)

$$M_r^{max} = 1.000 \text{ kg} \times (30 + 12,5) \text{ cm} = 42.500 \text{ kg.cm}$$

$$W_r^{min} = \alpha_h \cdot b^2 \cdot h.$$

Scoatem coeficientul α_h din tabela 7.1.

$$\frac{h}{b} = \frac{35}{25} = 1,4$$

$$\alpha_h = 0,2264 \text{ (prin interpolare)}$$

Deci,

$$W_r^{min} = 0,2264 \times 25^2 \times 35 = 4950 \text{ cm}^3$$

Rezultă:

$$\tau_r^{max} = \frac{42.500}{4950} = 8,6 \frac{kg}{cm^2}$$

d). Efortul tangenţial τ_{xz}

$$\tau_{xz} = \frac{1000 \circ 25 \circ 17{,}5 \circ 8{,}75}{\frac{25 \times 35^3}{12} \circ 25} = 1{,}7 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\tau = 8{,}6 + 1{,}7 = 10{,}3 \frac{kg}{cm^2}$$

Aflăm efortul "$\sigma_{echivalent}$" - în punctul M, cu teoria efortului unitar tangenţial maxim.

$$\sigma_{ech} = \sqrt{29{,}7^2 + 4 \times 10{,}3^2} = \sqrt{882{,}09 + 424{,}40} =$$

$$= 36{,}15 \frac{kg}{cm^2} < 100$$

Verificăm efortul $\sigma_{x,max}$ - în punctul K:

$$\sigma_x = \sigma \frac{1}{x} + \sigma \frac{3}{x} \circ (\sigma \frac{2}{x} - 0)$$

$$\sigma_x = 2{,}3 + \frac{1000 \times 100}{\frac{25 \times 35^2}{6}} = 2{,}3 + \frac{100.000}{5.000} = 22 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{adm}$$

-Verificăm efortul "$\sigma_{echivalent}$"- şi în punctul K, cu teoria III.

$$\sigma = 22 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\tau_{r,K} = \frac{M_r}{W_{r,K}}$$

unde: $W_{r,K} = \alpha_b \circ b^2 h = 0{,}2575 \times 25^2 \times 35 = 5.640 \text{ cm}^2$

$\alpha_b = 0{,}2575$ (prin interpolare)

Deci,

$$\tau_{r,K} = \frac{42.600}{5.640} \cong 7{,}6 \frac{kg}{cm^2}$$

Evident că "σ_{ech}" în punctul K este mai mic ca în punctul M (cel mai solicitat).

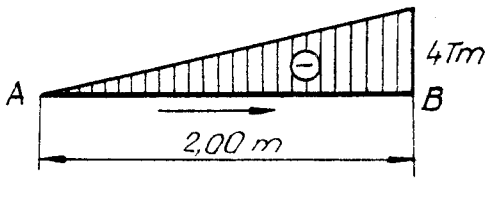
7.12. Să se verifice în secţiunea periculoasă grinda de lemn AB a unui balcon, acţionată de reacţiunea R = 2T, provenită de la grinda secundară AC - conform figurii 285.

Secţiunea periculoasă este încastrată din B.

Grinda AB este încovoiată şi răsucită de catre forţa R=2T a.Incovoerea se produce după axa "oz"

Momentul de încovoiere maxim este: (conform diagramei)

$M_z = 2T \times 2m = 4 \text{ Tm}$ (în încastrare)



b). Răsucirea se produce după axa "Oz" (axa barei)

Diagrama momentului de răsucire este constantă de-a lungul barei.

Fig. 286

BIBLIOTECA Institutul de Construcții

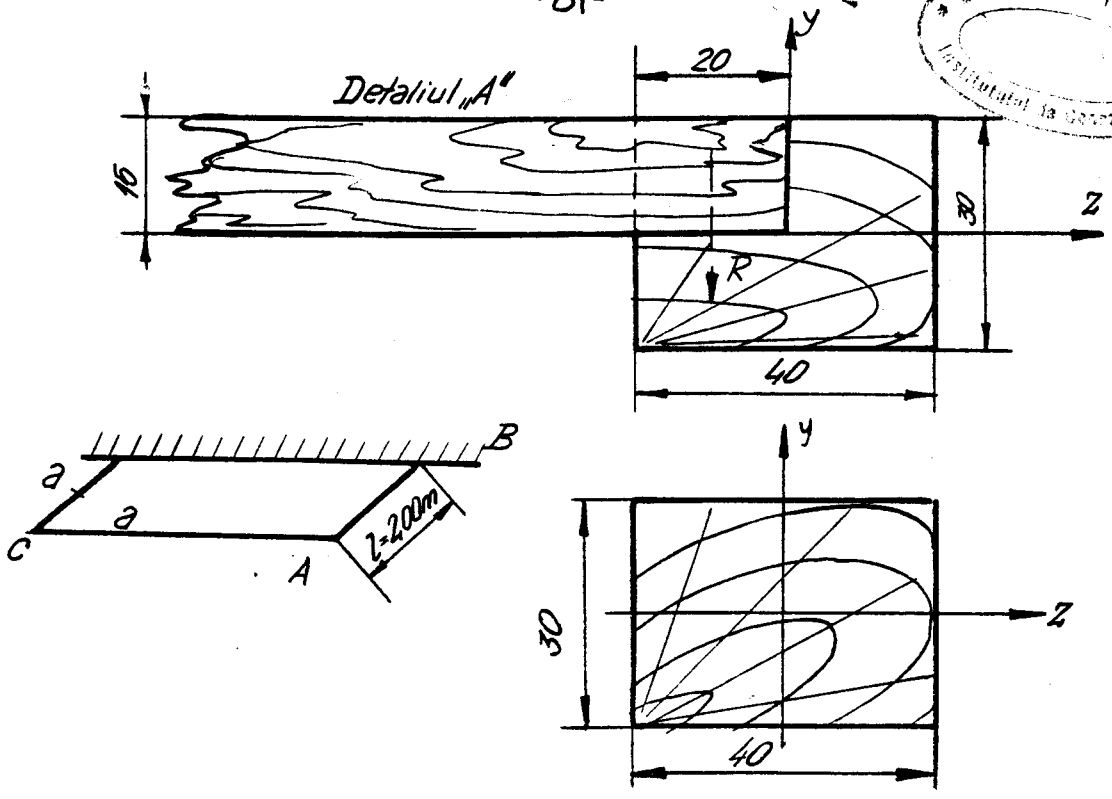


Fig. 285

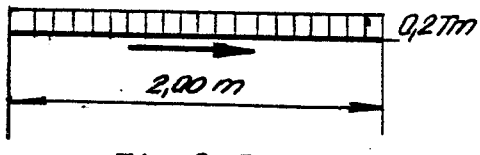


Fig.287

Reacţiunea R acţionează pe mijlocul reazemului, deci cu un braţ de pîrghie - faţă de axa "Oz" - de 10 cm.

$M_r = 2T \times 0,10\ m = 0,2\ Tm$

Vom aplica principiul suprapunerii efectelor.

Aflăm un efort σ_{max} - din încovoiere şi apoi un efort τ_{max} - din răsucirea barei.

Compunem aceste eforturi conform cu una din ipotezele de rupere şi obţinem un efort, " $\sigma_{echivalent}$ " care trebuie să verifice condiţia:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a = 100\ \frac{kg}{cm^2}\ \text{(în cazul nostru)}$$

a). Calculul la încovoiere pură.

Axa neutră este axa "Oz"

Modulul de rezistenţă la încovoiere este :

$$W_{zz} = \frac{40 \times 30^2}{6} = 6.000\ cm^3$$

Efortul (din încovoiere) maxim este :

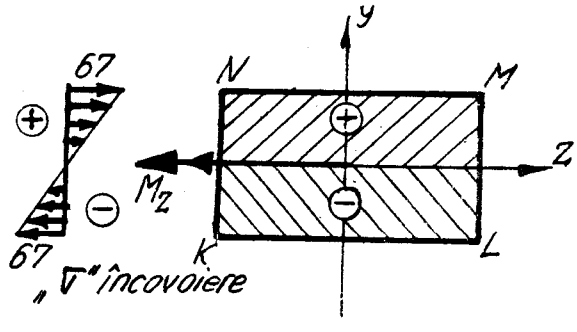


Fig. 288

$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z^{max}}{W_{zz}} = \frac{400.000}{6.000} = 67 \frac{kg}{cm^2}$$

b). Calculul la răsucire pură.

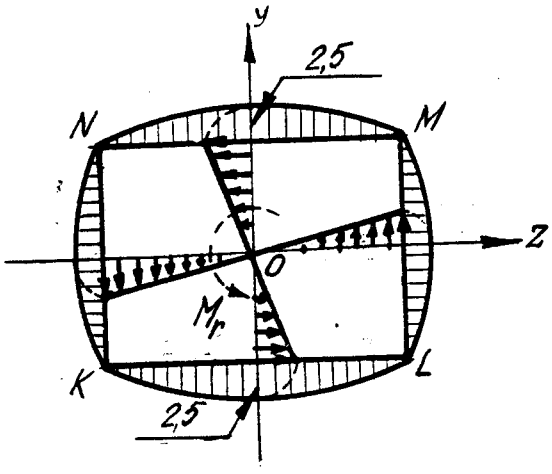


Fig. 289

Efortul τ_{max} (din răsucire) este :

$\tau_r^{max} = \frac{M_r^{max}}{W_r^{min}}$ (apare pe mijlocul laturilor lungi MN sau KL).

$W_r^{min} = \alpha_h \cdot b^2 h.$ (cm^3)

Coeficientul α_h îl scoatem din tabele, funcţie de raportul

$\frac{h}{b} = \frac{40}{30} = 1,33$

$\alpha_h = 0,2233$ (tabelul 7.1, prin interpolare)

Modulul de rezistenţă minim la răsucire, devine

$W_r^{min} = 0,233 \times 30^2 \times 40 = 8,000 \ cm^3$

Deci, $\tau_r^{max} = \frac{20.000}{8.000} = 2,5 \frac{kg}{cm^2}$

Verificăm grinda cu teoria de rupere a efortului unitar (teoria III), astfel :

$\tau_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{67^2 + 4 \times 2,5^2} = 67,2 \frac{kg}{cm^2} < 100$ τ_{maxim}

Grinda rezistă în bune condiţii; în acest caz, răsucirea este relativ mică faţă de încovoiere.

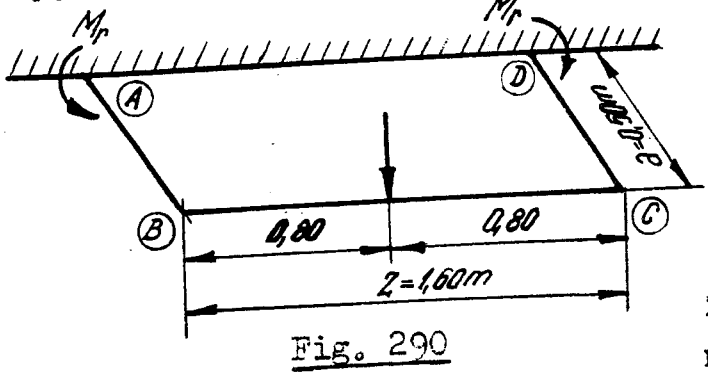


Fig. 290

7.13.- Se dă grinda cotită din oţel, cu secţiunea circulară înăcată normal pe planul său de o forţă P = I (fig.alăturată)

Să se dimensioneze grinda în ipoteza de calcul a deformaţiei maxime.

Problema este static nedeterminată.

Bara BC este încovoiată; bara AB (sau CD) este încovoiată şi răsucită. Secţiunea barei din A (sau D) este secţiunea

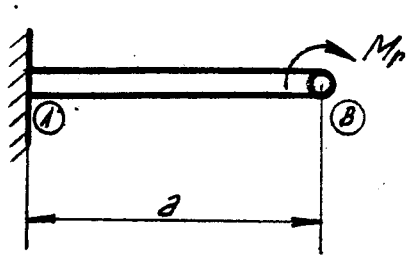


Fig.291

periculoasă. Aici apare un moment de răsucire (M_r) şi un moment încovoietor (M_i).

Folosim principiul suprapunerii efectelor.

a. Răsucirea secţiunii B faţă de A. cu un unghi φ'_B

$$\varphi'_B = \frac{M_r \times a}{G \times I_p}$$

Izolăm bara BA.

Asupra ei lucrează:

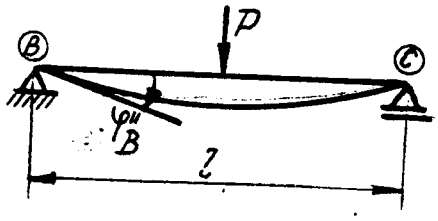


Fig.292

b). Sarcina concentrată P = 1T la mijlocul grinzii, care produce în B un unghi de rotire φ''_B

$$\varphi''_B = \frac{P\,l^2}{16\,EI}$$ (rotirea unei grinzi simplu rezemată, încărcate cu o sarcină la mijloc).

c). Momentul M_r (necunoscut) este momentul încovoietor pentru bara BC şi moment răsucitor pentru AB.

El asigură continuitatea barei în punctul B.

Rotirea grinzii BC, încărcată cu 2 momente concentrate la capete este φ'''_B

$$\varphi'''_B = \frac{M_r \cdot l}{2\,EI}$$

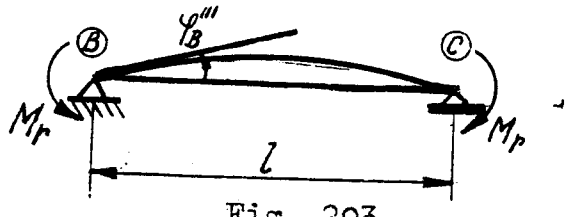


Fig. 293

Rezultă unghiul de deformaţie în B, datorită încovoierii barei BC:

$$\frac{P\,l^2}{16\,EI} - \frac{M_r\,l}{2\,EI}$$

Acesta trebuie să fie egal cu unghiul de deformaţie în B, datorită răsucirii barei AB.

Deci,

$$\frac{M_r \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{P\,l^2}{16\,EI} - \frac{M_r \cdot l}{2\,EI}$$

Cum $I_p = 2\,I$, relaţia de mai sus devine :

$$\frac{M_r \cdot a}{2\,GI} + \frac{M_r \cdot l}{2\,EI} = \frac{P\,l^2}{16\,EI}$$

Se obţine momentul necunoscut "M_r".

$$M_r = \frac{P\,l^2}{8\left(l + a\,\frac{E}{G}\right)}$$

In cazul de faţă

$$M_r = \frac{1000 \times 160^2}{8\left(160 + 50 \times \frac{2,1 \times 10^6}{8,1 \times 10^5}\right)} = 11.100 \text{ kg cm} = 0,111 \text{ Tm}$$

Momentul încovoietor în încastrarea din A, este :

$$M_î = \frac{P}{2} \times a = \frac{1000}{2} \times 50 = 25.000 \text{ kg cm} = 0,25$$

Momentul încovoietor echivalent, conform teoriei a II-a de rupere :

$$M_{ech} = 0,35 \times M_i + 0,65 \times \sqrt{M_i^2 + M_r^2}$$

$$M_{ech} = 0,35 \times 0,25 + 0,65 \times \sqrt{0,25^2 + 0,111^2} = 0,277 \text{ Tm}$$

Dimensionarea barei AB :

$$W^{nec} = \frac{M_{ech}}{\sigma_a} = \frac{0,277 \times 10^5}{1,4 \times 10^3} \simeq 20 \text{ cm}^3$$

$$\frac{3,14 \times d^3}{32} = 20 \qquad d = 5,9 \text{ cm}$$

alegem: d = 60 mm

Verificarea barei BC.

Momentul încovoietor - la mijlocul barei va fi destul de mare, avînd în vedere deschiderea l (faţă de a).

$$M = - M_r + \frac{P\,l}{4} = - 0,111 + \frac{1 \times 1,60}{4} = 0,289 \text{ Tm}$$

Efortul unitar la mijloc (pct E) va fi, evident, mai mic.

$$\sigma_{ef} = \frac{0,289 \times 10^5}{\frac{3,14 \times 6^3}{32}} = 1360 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_a$$

7.14. Să se calculeze forţa capabilă "P", pe care o poate suporta grinda cu inimă plină sudată din figură, de lungime 2 m. şi încastrată cu un capăt în zidărie. (figura 294)

Secţiunea periculoasă este în încastrare. Aici secţiunea compusă sudată - va fi încovoiată (faţă de axa z) şi răsucită (după axa x). Astfel :

- Momentul de răsucire :

$M_r = Pa = 12,50\ P$ / T cm /

Diagrama în momentul de răsucire este arătată mai jos. figura 295.

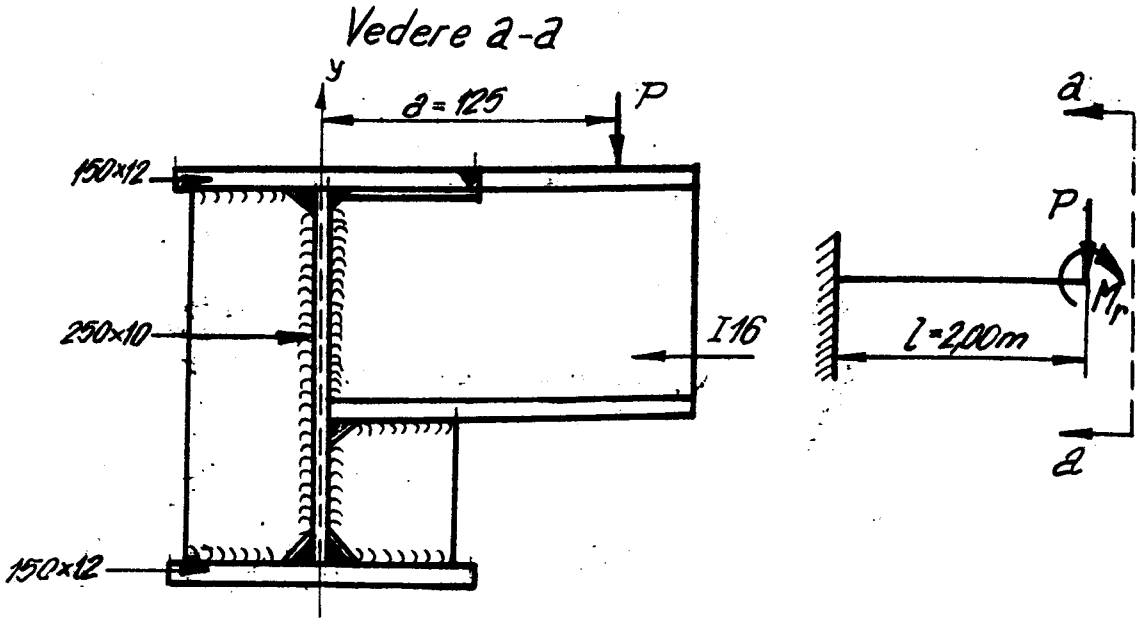


Fig. 294

Fig. 295

Modulul de rezistenţă la răsucire, minim

$$W_r^{min} = \frac{I_r}{\tau_{max}}$$

unde

$$I_r = \eta \sum_1^3 \frac{b_i^3 \, h_i}{3}$$

Secţiunea este alcătuită din 3 dreotunghiuri înguste (1,2 • 13 + 1,25); în calculul momentului de inerţie la răsucire, aplicăm corecţia corespunzătoare secţiunii compuse din platbenzi sudate. (Coeficientul de profil $\eta = 1,5$.

Deci,

$$I_r = 1,5 \cdot \left(2 \cdot \frac{1,2^3 \cdot 13}{3} + \frac{1^3 \cdot 25}{3}\right) = 1,5 \; (17,28+8,33) = 38,40 \text{ cm}^4$$

Rezultă:

$$W_r^{min} = \frac{38,40}{1,2} = 32 \text{ cm}^3$$

Momentul γ de răsucire, maxim este :

$$\tau_r^{max} = \frac{12,50}{32} \times 100 \cdot P = 391 \, P \, \frac{kg}{cm^2}$$

Reducînd forţa P în punctul O, obţinem un moment de răsucire (pe care l-am calculat) şi în plus o încovoiere după axa zz produsă de forţa P - redusă.

Axele ox şi oz sînt axe principale de inerţie ale secţiunii compuse (de lungime l=2 m).

Momentul încovoietor :

$$M_z = P \cdot (l - \frac{7,4}{2}) \cong P \cdot l = 200 \cdot P \ (T.cm)$$

Diagrama momentului încovoietor este arătată mai jos

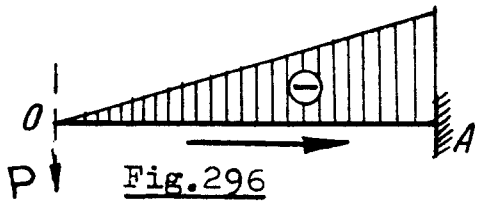


Fig.296

- Modulul de rezistenţă la încovoiere :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

$$I_z = \frac{1.25^3}{12} + 2.1,2 \cdot 15 \cdot 13,10^2 = 1300+6200 = 7500 \ cm^4$$

$$W_z = \frac{7500}{13,70} = 549 \ cm^3$$

- Efortul σ_x este :

$$\sigma_x = \pm \frac{200}{549} \cdot 1000 \cdot P \cong 365 P \ (\frac{kg}{cm^2})$$

Pentru aflarea efortului $\sigma_{echivalent}$, aplicăm teoria de rupere energetică. Astfel :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a$$

In cazul de faţă :

$$\sigma_{ech} = P \cdot \sqrt{365^2 + 3.391^2} = 1400.$$

Din această ecuaţie, scoatem sarcina maximă "P"

$$769,5.P = 1400$$

$$\underline{P=1,82 \ T}.$$

Observaţie :

In acest caz, efortul τ_r are o pondere mare.

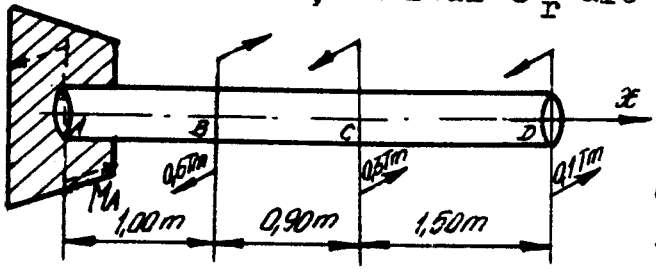


Fig. 297

7.15.- Să se dimensioneze arborele circular încastrat din figura alăturată.

Se dă: - rezistenţa admisibilă la răsucire: $\tau_a = 400 \ kg/cm^2$

Unghiul de răsucire specifică maxim: $\theta_a = (\frac{1}{4})^0/ml.$

- modulul de elasticitate transversal $G = 800.000 \ kg/cm^2$

- Aflarea reacţiunii din încastrare. Momentul reactiv de torsiune (M_A) se va afla dintr-o proiecţie pe axa barei (Ax) a vectoriilor - momente.

$$-M_A + 0,6 - 0,3 - 0,1 = 0 \qquad (\Sigma M_{răs.} = 0)$$

Rezultă,

$$M_A = 0,2 \ Tm$$

Diagrama momentelor de răsucire este arătată mai jos :

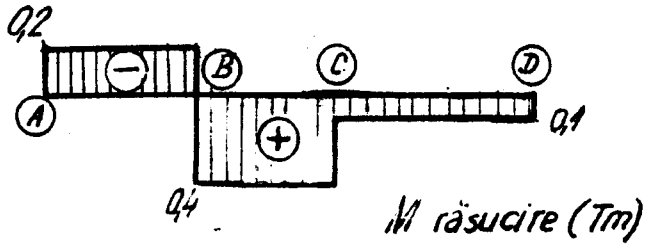


Fig. 298

Dimensionarea barei din condiţia de rezistenţă.

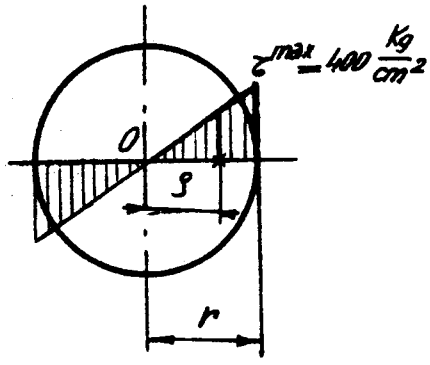


Fig.299

Vom dimensiona în zoa BC, unde momentul de răsucire este maxim. Dimensionarea se face cu formula :

$$W_p^{nec} = \frac{M_r^{max}}{\sigma_a} \qquad \frac{40.000}{400} = 100 \text{ cm}^3$$

Deci,

$$\frac{3,14.d^3}{16} = 100 \qquad d = \sqrt[3]{\frac{1.600}{3,14}} = 8 \text{ cm}$$

- Dimensionarea barei din condiţia de deformaţie.

Avînd în vedere faptul că deformaţia barei de răsucire (unghiul) nu poate depşi o valoare limitată (θ_{adm}) trebuie să dimensionăm bara respectînd şi această condiţie. Comparînd rezultatele din cazurile a şi b, vom alege diametru cel mai mare.

Se dă :

$$\theta_{adm} = \left(\frac{1}{4}\right)^o/ml$$

Transformăm gradele în radiani:

$$1^o = \frac{\pi}{180} = \frac{3,14}{180} = 0,0176 \text{ rad.}$$

Deci,

$$\theta_{adm} = \left(\frac{0,0176}{4}\right) \frac{rad}{ml} = 0,004 \frac{rad}{ml}$$

Unghiul de rotire " φ " are expresia :

$$\varphi = \frac{M_r \, a}{G.I_p}$$

Unde: G - modulul de elasticitate transversal.

Unghiul de răsucire maxim apare în zona BC (unde momentul de răsucire este maxim) sau în zona CD (unde lungimea este maximă).

a. Pentru zona BC

$M_r \cdot a = 40.000 \times 90 = 360.000$ kg*cm

b). Pentru zona CD

$M_r \cdot a = 10.000 \times 150 = 1.500.000$ kg/cm

Deci condiţia de deformaţie devine la limită:

$$\varphi_{max} = \frac{3.600.000}{8x10^5 x\ I_p} = \text{adm/o,9o m.}$$

φ adm/0,90 ml = 0,0044 x 0,90 = 0,00396 rad/0,90 ml

Rezultă :

$$\frac{\pi d^4}{32} = \frac{3.600.000}{8x10^5 x 0,00396}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{3.600.000 \times 32}{3,14x8x0,00396x10^5}} = 10,4 \text{ cm}$$

Dimensionăm din condiţia de deformaţie

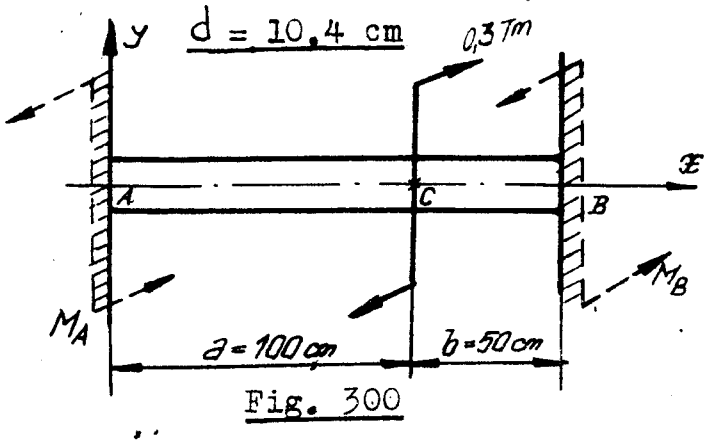


Fig. 300

7.16.- Să se dimensioneze bara de secţiune circulară, din fontă, dublu încastrată, încărcată cu un moment de răsucire în secţiunea din C. Se dă rezistenţa admisibilă la răsucire:

$\tau_a = 400$ kg/cm^2

1.- Aspectul static

In cele două încastrări (din A şi B) apar momente de răsucire reacrive (M_A, M_B). Sensul lor îl presupunem contrar sensului momentului de răsucire exterior. Problema este static nedeterminată exterior.

Scriem ecuaţia de proiecţie a vectorilor - moment de răsucire.

(1) $0,3 - (M_A + M_B) = 0$ $\qquad (\sum M_x^r = 0)$

2.- Aspectul geometric

Situaţia de încărcare de mai sus se poate descompune în următoarele: (conform figurii ce urmează):

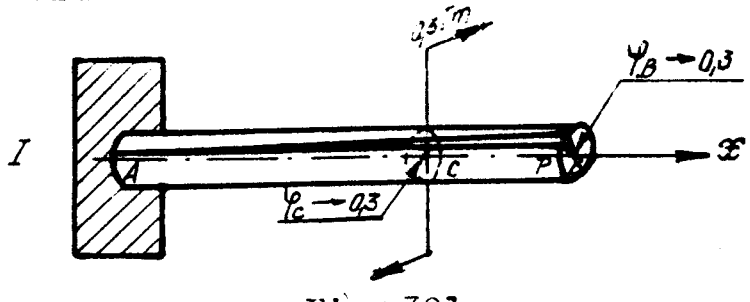


Fig. 301

In realitate în capătul B este o încastrare; pentru a restabili situaţia reală va trebui să aplicăm momentul reactiv de răsucire (M_B ca o

încărcare exterioară.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, obţinem :

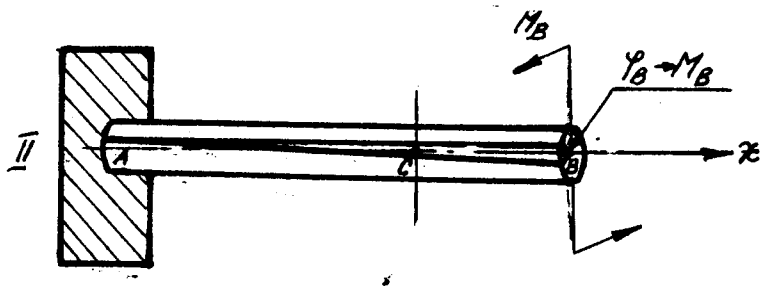


Fig. 302

Un punct oarecare P, de pe conturul secţiunii din încastrarea B se roteşte datorită momentului exterior 0,3 Tm ($\varphi_{B \rightarrow 0,3}$) şi datorită momentului reacţiune M_B ($\varphi_{B \rightarrow M_B}$). In realitate în încastrare, rotirea este împiedicată, deci rotirea totală (φ_B) trebuie să fie nulă.

$$(2)\quad \varphi_B = \varphi_{B \rightarrow 0,3} - \varphi_{B \rightarrow M_B} = 0$$

3.- Aspectul fizic.

Conform principiului proporţionalităţii între sarcini şi deplasări, putem înlocui rotirea funcţie de moment.

Deci,

$$\varphi = \frac{M \times a}{G \cdot I_p}$$

înlocuind în relaţia (2), obţinem :

$$\frac{30.000 \times 100}{G \times I_p} - \frac{M_B \times 150}{G \times I_p} = 0$$

Obţinem : $M_B = \frac{30.000 \times 100}{150} = 20.000$ kg cm = 0,2 Tm

Rămîne, din relaţia (1):

$M_A = 0,3 - 0,2 = 0,1$ Tm

Diagrama momentelor de răsucire este astfel :

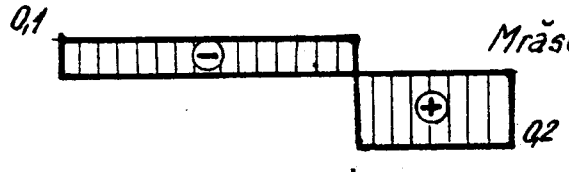


Fig. 303

Dimensionarea se face cu formula :

$$W_{nec} = \frac{M_r^{max}}{\sigma_a}$$

Unde :

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \ (cm^3)$$

Deci,

$$\frac{3,14 \times d^3}{16} = \frac{20.000}{400}$$

Rezultă :

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 20.000}{3,14 \times 400}} \approx 6,4 \text{ cm}$$

rp

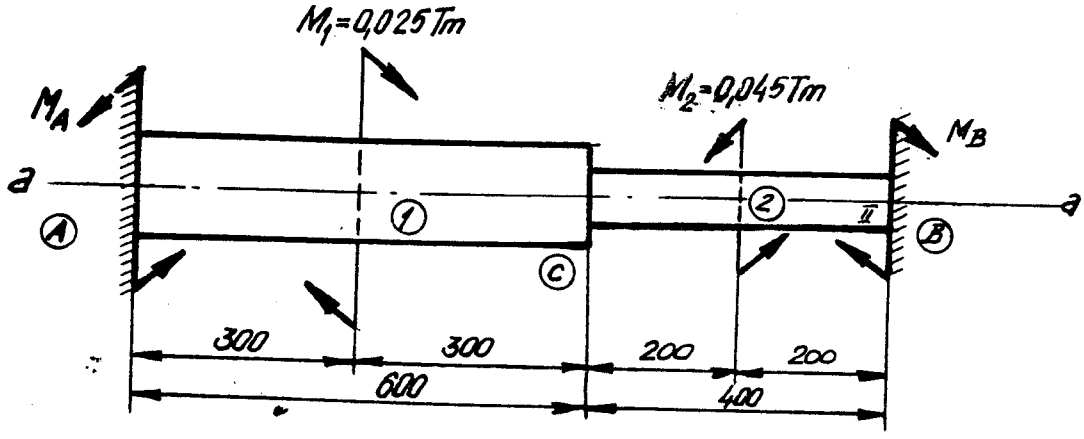


Fig. 304

7.17.- Se dau doi arbori circulari de oţel de diametre diferite, (d_1 = 55 mm şi d_2 = 40 mm) încarcaţi ca în figură.

Se cere :

1. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire
2. Să se calculeze efortul $\tau_{răsucire}$ maxim.

1. Sistemul este static nedeterminat deoarece avem două necunoscute: momentele de rasucire - reacţiuni din încastrări (M_A şi M_B) şi o singură ecuaţie de echilibru: ecuaţia de moment faţa de axa "a - a" (axa arborelui).

$$- M_A + 2.500 - 4.500 + M_B = 0$$

$$M_A = M_B - 2.000 \quad (1)$$

Ecuaţia a doua o obţinem scriind aspectul geometric : deformaţia unghiulară în secţiunea (C) a celor două bare (AC şi BC) trebuie să fie egale.

Deoarece un punct din secţiune aparţine ambelor bare, deci

$$\varphi_{C,\ I} = \varphi_{C,\ II}$$

Deformaţia unghiulară în secţiunea C, produsă de M_A şi M_1 (pe bara I) trebuie să fie egală cu cea produsă de M_2 şi M_B (pe bara II).

Ştim că : $\varphi = \frac{M_r \times l}{G \times I_p}$ (aspectul fizic)

Rezultă:

$$-\frac{M_A \times 60}{G \times I_{pI}} + \frac{2500 \times 30}{G \times I_{pI}} = -\frac{4500 \times 20}{G \times I_{pII}} + \frac{M_B \times 40}{G \times I_{pI}}$$

Simplificînd cu G şi calculînd momentele de inerţie polare, obţinem :

$$I_{pI} = \frac{3,14 \times 2,85^4}{2} = 104 \text{ cm}^4$$

$$I_{pII} = \frac{3,14 \times 2^4}{2} = 25,1 \text{ cm}^4$$

$$- 0,577 . M_A + 720 = - 3580 + 1,6 . M_B \quad (2)$$

Rezolvînd sistemul, obţinem :

M_A = 510 kg/cm (negativ, conform figurii de mai jos)

M_B =2510 kg/cm

Diagrama momentelor de răsucire, pe arbore - devine :

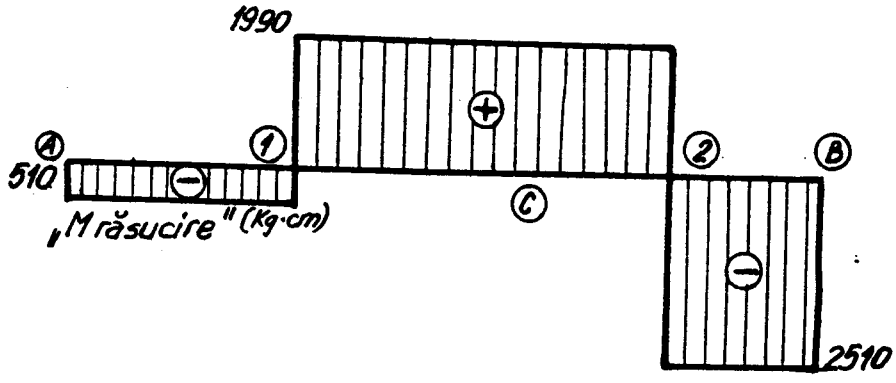


Fig. 305

2.- Efortul de răsucire maxim se produce în bara II, pe zona 2 B (M_{max} = 0,0251 Tm).

Modulul de rezistenţă polar, corespunzător:

$$W_{pII} = \frac{I_{pII}}{2} = \frac{25,1}{2} = 12,55 \text{ cm}^3$$

Deci,

$$\tau_{r,max} = \frac{2510}{12,5} = 201 \frac{kg}{cm^2} \text{ (pe conturul secţiunii)}$$

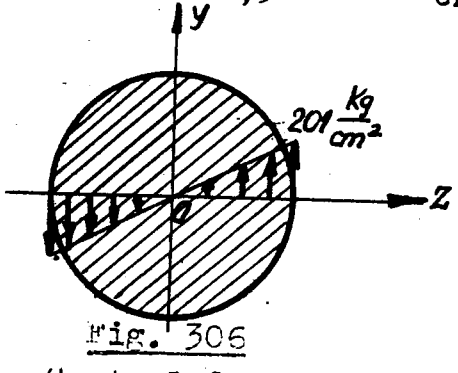


Fig. 306

Diagrama efortului " τ " de răsucire, este cea din figura alăturată.

7.18.- Sa se determine centrul de încovoiere şi elementele sectoriale ale unui profil dublu T. (figura următoare)

- Centrul de încovoiere (E) se găseşte în centrul de greutate (O) la intersecţia axelor de simetrie "Y O Z".

- Raza polara origina coincide cu axa "Yı", deoarece faţă de ea se obţine :

$$\int_A \omega_p \cdot dA = 0 .$$

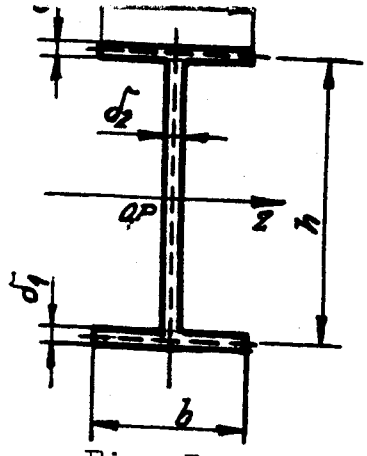


Fig. 307

- Suprafeţele sectoriale "ω_p"

Alegem ca semn pozitiv de rotire a razei polare, sensul acelor de ceasornic. Inimii îi corespunde o suprafaţa sectorială egală cu zero; fiecărui punct al liniei mediane a tălpilor îi corespunde o anumită suprafaţă sector.

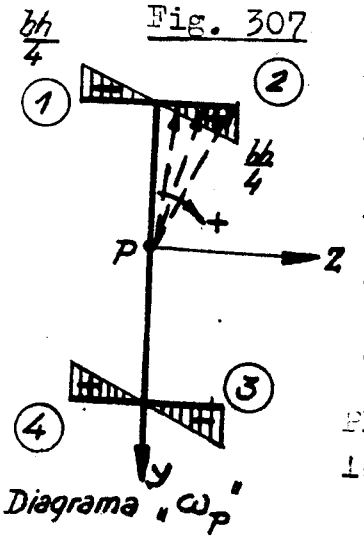


Fig.308

Astfel, conform definiţiei, avem :

$$-\omega_1 = \omega_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{bh}{4} \ (cm^4)$$

$$-\omega_3 = \omega_4 = \frac{b\,h}{4}$$

- Momentul static sectorial "S_ω"

$$S_\omega = \int_A \omega \cdot dA = \delta_1 \int_s \omega \cdot ds$$

Plecam de la extremităţile profilului la mijlocul tălpii vom avea un maxim.

$$S_\omega^{max} = \delta_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2 h \delta_1}{16} \ (cm^4)$$

Diagrama obţinută este o parabola

- Momentul de inerţie sectorial "I_ω"

$$I_\omega = \int_A \omega_p^2 dA = \delta_1 \int_s \omega_p ds \cdot \omega_p$$

Integrăm diagrama "ω_p" prin ea însăşi, folosind regula lui Vereşceaghin.

$$I_\omega = 4\delta_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{4} =$$

$$= \frac{b^3 h^2 \delta_1}{24} \cdot (cm^6)$$

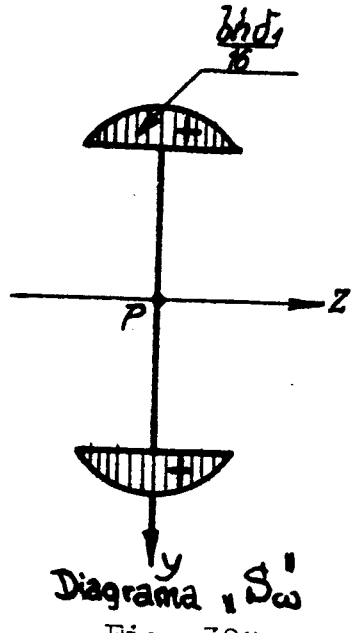


Fig. 309

7.19. Să se găsească centrul de încovoiere şi elementele sectoriale ale profilului din tabla subţire, din figură.

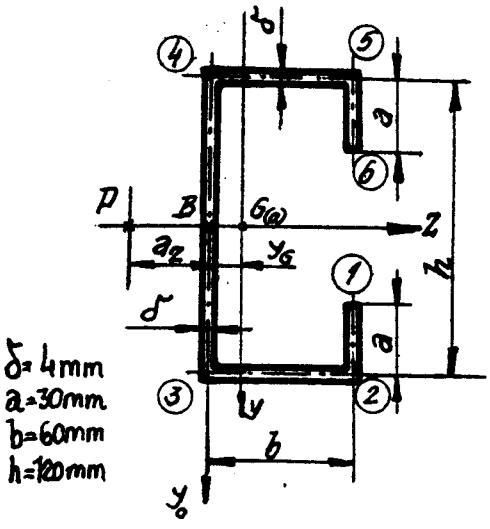


Fig.310

Secţiunea o considerăm compusă dintr-o sumă de dreptunghiuri

Aria:

$A = \delta(h+2a+2b) = 0,4(12+2.3+2.6) =$

$= 12 \text{ cm}^2$

Axa "Oz" este axa de simetrie. ($y_c = 0$). Centrul de greutate al profilului se va găsi pe axa "Oz", la următoarea distanţă de axa "By$_0$":

$$z_c = \frac{\delta(b.\frac{b}{2} + a.b)}{A} = \frac{b\,\delta(b+2a)}{A} =$$

$$= \frac{0,4.6(6+2.3)}{12} = 2,4 \text{ cm}$$

Momentele de inerţie faţă de axele centrale principale "YGZ" :

$$I_y = \frac{0,4 \cdot 12^3}{12} + 2\left(0,4.6.6^2 + \frac{0,4.3^3}{12} + 0,4.3.4,5^2\right) = 280,8 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 0,4 \cdot 12 \cdot \ldots^2 + 2\left(\frac{0,4.6^3}{12} + 0,4.6.0,6^2 + 0,4.0,3.3,6^2\right) =$$

$$= 74,9 \text{ cm}^4$$

Suprafeţele sectoriale faţă de un pol B, arbitrar ales.

$\omega_{B,4} = 0$

$\omega_{B,5} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$

$\omega_{B,6} = 36 + \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 54 \text{ cm}^2$

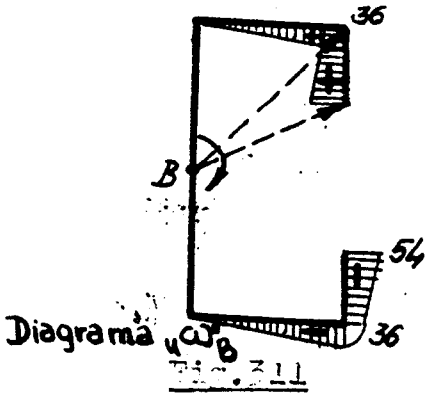


Fig.311

Construim şi diagrama ordonatelor "Y" ale punctelor de pe linia mediană a profilului.

Momentul static sectorial-liniar, calculat în raport cu polul B şi axa "Oz"

$$S_{\omega_B y} = \int_A \omega_B y \cdot dA$$

Integrăm diagramele "ω_B" şi "Y" după regula lui Vereşceaghin, ţinînd seama de semn.

$$S_{\omega_{By}} = -2\left(\frac{1}{2}.36.6.6 + \frac{1}{2}.36.3.5 + \frac{1}{2}.54.3.4\right) \cdot$$

$$\cdot 0,4 = -994 \text{ cm}^5$$

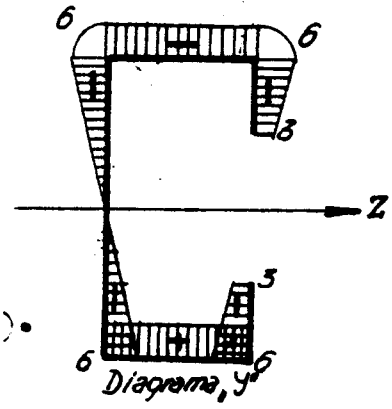


Fig.312

- Centrul de încovoiere P se găseşte pe axa "OZ"

$$a_y = \frac{S\omega_B \cdot Z}{I_y} = 0$$ (integrăm o diagramă simetrică cu una antisimetrică).

$$a_z = \frac{S\omega_B \cdot y}{I_z} = -\frac{994}{280,8} = -3,54 \text{ cm}$$

- Diagrama suprafeţei sector principală. (figura ce urmează).

Plecăm de la axa "Z" ca rază vectoare, care trece prin punctul P.

$$\omega_{P,4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,54.6 = 21,2 \text{ cm}^2 \ (-)$$
$$\omega_{P,5} = -21,2 + 2 \cdot \frac{1}{2} .6.6 = 14,8 \text{ cm}^2 \ (+)$$
$$\omega_{P,6} = 14,8 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9,54 = 43,4 \text{ cm}^2 \ (+)$$

- Momentul static sectorial.

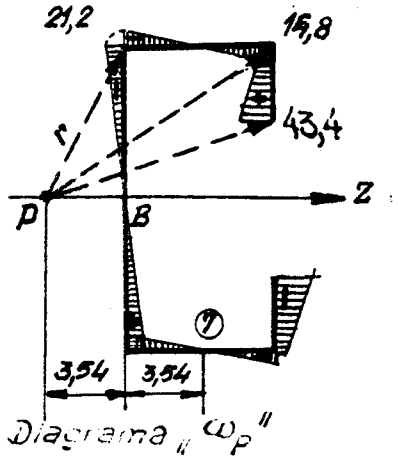


Fig. 313

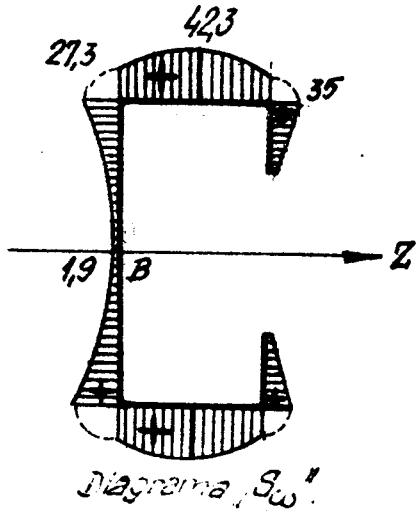


Fig. 314

$$S_\omega = \int_A \omega_p dA = \delta \int_S \omega_p \cdot dS$$

$$S_{\omega,6} = 0$$

$$S_{\omega,5} = 0,4 \cdot \frac{14,8 + 43,4}{2} \cdot 3 = 35 \text{ cm}^4$$

$$S^{max}_{\omega,7} = 35 + 0,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14,8 \cdot 2,46 = 42,3 \text{ cm}^4$$

$$S_{\omega,4} = 42,3 - 0,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 21,2 \cdot 3,54 = 27,3 \text{ cm}^4$$

$$S_{\omega,B} = 27,3 - 0,4 \cdot \frac{1}{2} 21,2 \cdot 6 = 1,9 \text{ cm}^4$$

- Momentul de inerţie sectorial principal.

$$I_\omega = \int_A \omega_p^2 \cdot dA = \delta \int_S \omega_p dS \cdot \omega_p$$

Integrăm diagrama "ω_P" prin ea însăşi (pe porţiuni). Aplicăm regula lui Vereşceaghin.

$$I_\omega = 2.\frac{1}{2}\,(21{,}2.6.\tfrac{2}{3}\,21{,}2 + 21{,}2.6.14{,}2 - 21{,}2.6.4{,}7 -$$

$$-14{,}8.6.7{,}1 + 14{,}8.6.9{,}4 + 14{,}8.3.23{,}9 + 43{,}4.3.33{,}63)\;0{,}4 =$$

$$= 3.450\ cm^6$$

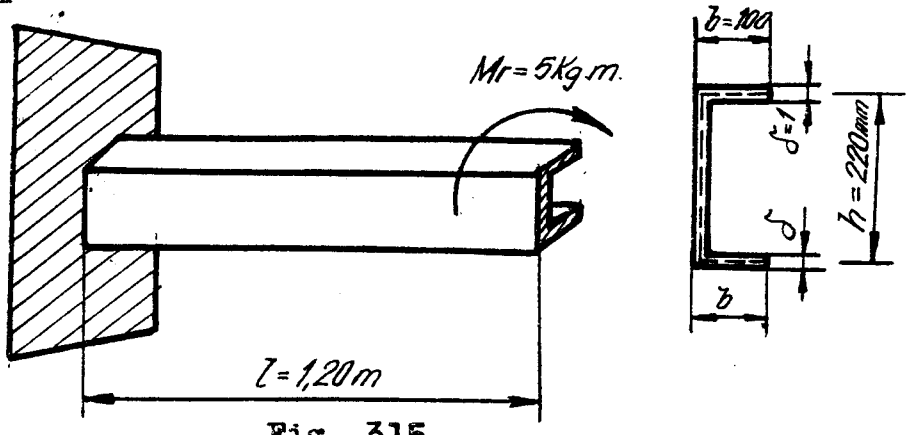


Fig. 315

7.20.- Se dă bara cu pereţi subţiri profil U, cu dimensiunile din figură. Bara este încastrată la un cap în beton, astfel ca deplasarea să fie împiedicată şi acţionată la celălalt capăt de un moment M_x = 5 kgm.

Să se afle valoarea maximă a eforturilor unitare normale şi tangenţiale.

Caracteristicile geometrice ale secţiunii sînt:

a) Aria secţiunii

$$A = (2b + h)\delta = (2.10 + 22)\;0{,}1 = 4{,}2\ cm^2.$$

b) Coordonata "Z" a centrului de greutate

$$z_G = \frac{2.b\,\delta\,.\,\frac{b}{2}}{A} = \frac{2.10.0{,}1.5}{4{,}2} = 2{,}38\ cm$$

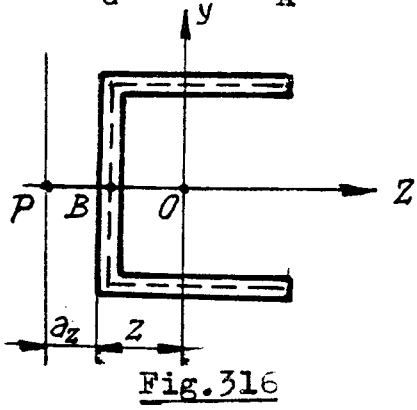


Fig.316

c) Momentele de inerţie în raport cu axele centrale principale "OY" şi "OZ"

$$I_Z = \frac{\delta\,h^3}{12} + 2.b\,\delta\,.\,(\frac{h}{2})^2 = \frac{0{,}1\,.\,22^2}{12} +$$

$$+ 2.10.0{,}1.11^2 = 331\ cm^4$$

Am neglijat momentul de inerţie propriu al tălpilor.

$$I_y = 2\left[\frac{\delta\,b^3}{12} + \delta\,b\,(\frac{b}{2} - z)^2\right] + \delta\,h\cdot z^2 = 2\left[\frac{0{,}1\,.\,10^3}{12} +\right.$$

$$\left. + 0{,}1\,.\,10\,(\frac{10}{2} - 2{,}38)^2\right] + 0{,}1\,.\,22\,.\,2{,}38^2 =$$

$$= 2\,(\ 834 + \ 86) = 12{,}50 = 42{,}9\ cm^4$$

Am neglijat momentul de inerţie propriu al inimii.

d) Coordonatele centrului de încovoiere.

Vor fi date de relaţiile :

$$a_Z = b_Z + \frac{\int_A \omega_B \cdot y \, dA}{I_Z}$$

$$a_y = b_y - \frac{\int_A \omega_B \cdot Z \, dA}{I_y}$$

Unde ω_B este suprafaţa sectorială determinată faţă de un pol ales arbitrar (pct.B).

Centru de încovoiere se găseşte pe axa "OZ" (axă de simetrie). Cu polul arbitrar B, construim diagramele "ω_B" şi "y"

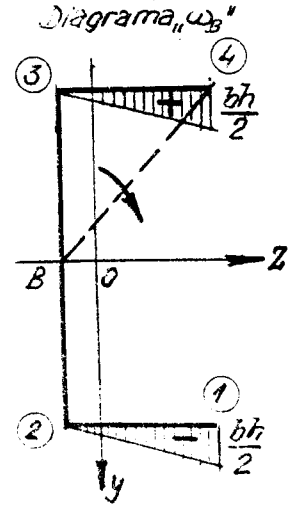


Fig. 317

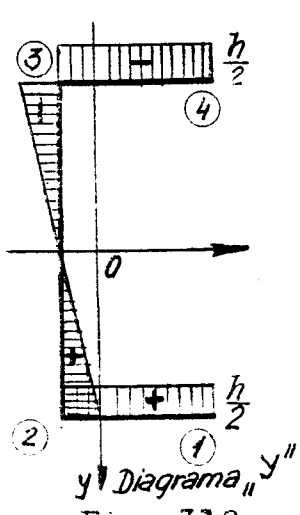


Fig. 318

$\omega_{B,3} = 0$

$\omega_{B,4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b\,h}{2}$

Similar pentru punctele 1 şi 2

Aplicăm regula lui Vereşceaghin pentru înmulţirea diagramelor.

Obţinem :

$$\int_A \omega_B \cdot y \, dA = -2 \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{b\,h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} \cdot \delta = -\frac{b^2 h^2 \delta}{4}$$

Momentul de inerţie faţă de axa Z :

$$I_Z = \frac{\delta\, h^3}{12} + 2\, b\, \delta \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\delta\, h^3}{12} + \frac{b\, h^2 \delta}{2}$$

Deci, făcînd toate operaţiunile,

$$a_Z = -\frac{3\, b^2}{h + 6b}$$

Numeric: $a_Z = -\frac{3 \cdot 10^2}{22 + 6 \cdot 10} = -3{,}66$ cm

e) Diagrama suprafeţei sectoriale principale. (faţă de polul P).

- Pentru punctul 3:

$$\omega_{P,3} = 2\, S_{AB3} = 2 \cdot \frac{1}{2} a_Z \cdot \frac{h}{2} = \frac{a_Z \cdot h}{2} = \frac{3{,}66 \cdot 22}{2} = 40{,}4 \text{ cm}^2$$

Suprafaţa rezultă prin rotirea razei vectoare în sens invers acelor de ceasornic, deci va fi negativa.

$$\omega_{P,4} = 2\,(S_{AB5} + S_{345})$$

Tinînd seama de semn şi ştiind că laturile $\overline{35}$ şi $\overline{B5}$ au valoarea:

$$\overline{35} = \frac{b\,h}{2\,(b + a_z)} \; ; \quad \overline{B5} = \frac{a_z\,h}{2\,(b + a_z)} \; ;$$

Obţinuta din asemanararea triunghiurilor AB5 şi 345, rezultă :

$$\omega_{P,4} = 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2\,h}{2(b+a_z)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_z^2 \cdot h}{2(b+a_z)}\right] = \frac{h\,(b-a_z)}{2}$$

Numeric,

$$\omega_{P,4} = \frac{22\,(10 - 3{,}66)}{2} = 69{,}6 \text{ cm}^2$$

Similar se procedeaza pentru punctele 1 şi 2.

Se admite că efortul " τ_ω " nu variaza pe grosimea profilului.

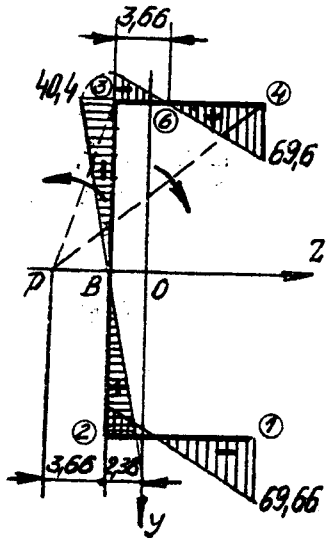


Diagrama „ω_P"
Fig.319

f) Momentul de inerţie sectorial al secţiunii.

$$I_\omega = \int_A \omega_P^2\,dA = \int_S \delta\,\omega_P\,dS\,\omega_P$$

Integrăm după metoda Vereşceaghin şi obţinem :

$$I_\omega = 2\left[\frac{a_z h}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{a_z h}{2} + a_z\,\frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{a_z h}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{h(b-a_z)}{2} \cdot (b-a_z)\,\frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{h\,(b-a_z)}{2}\right] =$$

$$= \frac{a_z^2 \cdot h^3 \cdot \delta}{12} + \frac{a_z^3 \cdot h^2 \delta}{6} + \frac{(b-a_z)^3 h^2 \delta}{6}$$

In cazul nostru :

$$I_\omega = \frac{3{,}66^2 \cdot 22^3 \cdot 0{,}1}{12} + \frac{3{,}66^3 \cdot 22^2 \cdot 0{,}1}{6} + \frac{6{,}34^3 \cdot 22^2 \cdot 0{,}1}{6} = 3.\,950 \text{ cm}^6$$

g). Momentul de inerţie la răsucire.

Avem o suprafaţă simplu conexă, alcătuită din dreptunghiuri înguste.

$$I_r = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^{3} S \cdot \delta^3 = \frac{1{,}12}{3}\,(2.10+22)\;0{,}1^3 \cong 0{,}0157 \text{ cm}^4$$

h) Momentul static sectorial.

Este maxim în punctul unde diagrama " ω_P " se anulează.

Legea sa de variaţie, deci şi a eforturilor unitare tangenţiale sectoriale, se arată în figura ce urmează.

rp

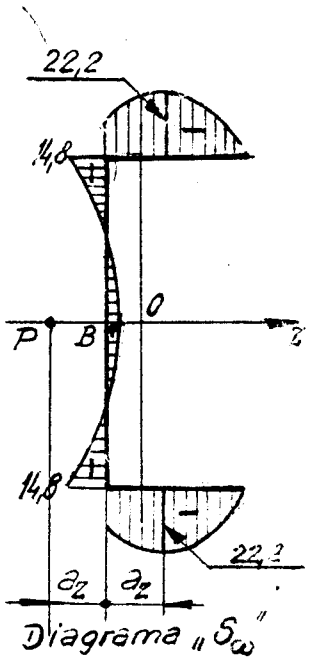


Fig. 320

S_ω^{max} este egală cu aria triunghiulară care se află în dreapta punctului nul (0) de pe diagrama coordonatelor sectoriale ale secțiunii.

$$S_\omega^{max} = \frac{1}{2} \cdot (b-a_z) \cdot \frac{h(b-a_z)}{4} \cong$$

$$\cong \frac{6,34^2 \cdot 22 \cdot 0,1}{4} = 22,2 \text{ cm}^4$$

Momentul static sectorial în punctul 3 este :

$$S_{\omega 3} = \frac{b\ h\ \frac{h}{2}\ (b - a_z)}{4} =$$

$$= \frac{22 \cdot 10 \cdot 0,1\ (10-7,32)}{4} = 14,8 \text{ cm}^4$$

Caracteristica elastică la încovoiere-răsucire a barei :

$$\alpha = \sqrt{\frac{G\ I_r}{E\ I_\omega}} = \sqrt{\frac{810.000 \times 0,015}{2.100.000 \times 3.640}} = 0,00129\ \frac{1}{\text{cm}}$$

$$\alpha l = 0,00129 \times 120 = 0,155$$

Bimomentul se poate calcula în mod aproximativ, analog cu calculul momentului încovoietor - pentru o bară obișnuită în consolă - deoarece produl: $\alpha l = 0,155 < 0,5$ (pentru console).

Putem aproxima deci:

$$B_{max} = M_r \cdot l = 500 \cdot 120 = 60.000 \text{ kg.cm.}$$

Datorită rigidității mici la răsucire pură ($G.I_r$), se poate admite că sarcina exterioară este preluată în întregime de bară, numai datorită încovoierii tălpilor și inimii.

- Momentul de încovoiere-răsucire din încastrare este :

$$M_\omega^{max} = M_r = 500 \text{ kg.cm}$$

- Eforturile unitare normale sectoriale maxime apar la punctele 1 și 4 (cele mai depărtate).

$$\sigma_{min}^{max}{}_\omega = \pm \frac{60.000}{3.640} \cdot 69,7 = \pm 1.150\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

- Eforturile unitare tangențiale sectoriale maxime provenite din încovoiere-răsucire, în încastrare, în punctul 6:

$$\tau_\omega^{max} = \frac{500 \cdot 22,2}{3650 \cdot 0,1} = 30,5\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

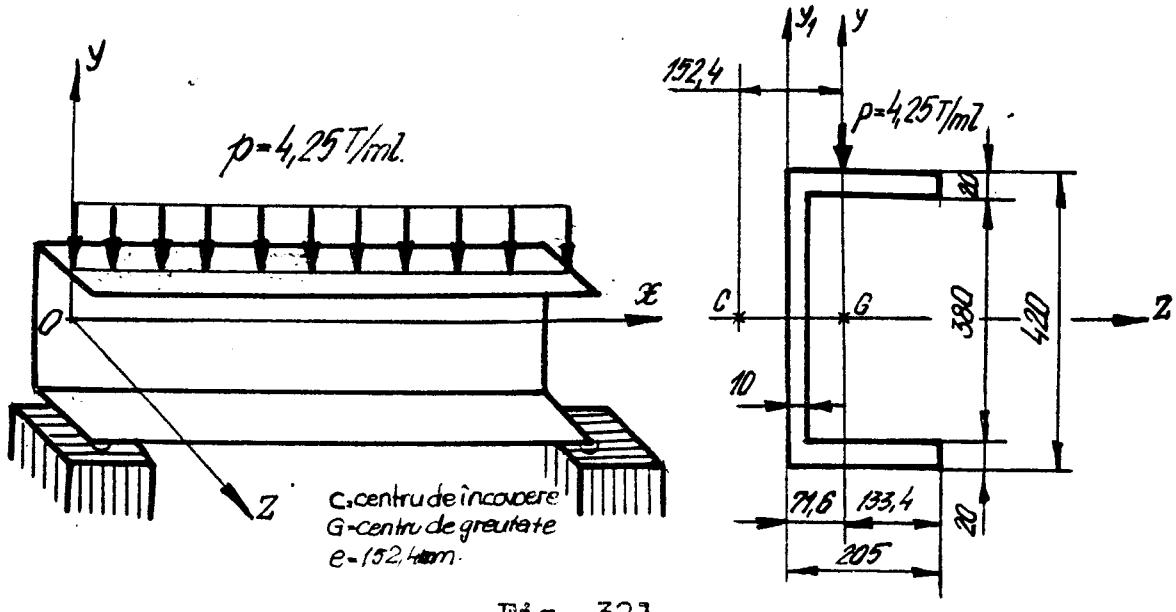


Fig. 321

7.21.- Să se afle eforturile în grinda cu secţiune în U, sprijinită la capete prin reazeme care nu permit răsucirea secţiunii, dar permit deplasarea liberă şi încărcată uniform cu o sarcină "P" aplicată cu o excentricitate (e) de centrul de încovoiere (figura de mai sus).

- Determinarea centrului de greutate.

$$Z_G = \frac{2x20,5x2x10,25 + 1x38x0,5}{2 \times 20,5 \times 2 + 38 \times 1} = \frac{859,5}{120} = 7,16 \text{ cm}$$

$Y_G = 0$ (axa "ZZ" este axă de simetrie).

Determinarea caracteristcilor geometrice şi liniar - sectoriale

a) Aria secţiunii

$A = 2 \times 20,5 \times 2 + 38 \times 1 = 120 \text{ cm}^2$

b) Diagramele "Y" şi "Z"

Se măsoară distanţele la care se află punctele de pe linia mediană a conturului secţiunii, faţă de axele ZZ (diagrama "Y") şi respectiv faţă de axele yy (diagrama "Z").

Reprezentarea grafică s-a făcut în figura ce urmează.

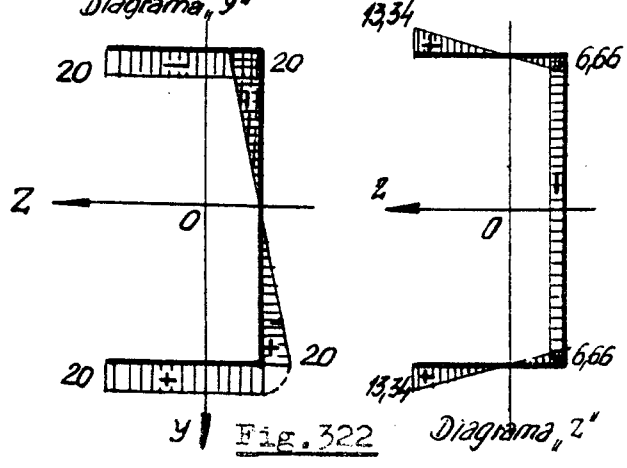


Fig.322

c) Diagrama ariilor sectoriale.

Aria sectorială este egală cu :

$$\omega_0 = \int_S r \cdot ds$$

r - perpendiculara coborîtă din polul A_0 pe direcţia liniei mediane a secţiunii.

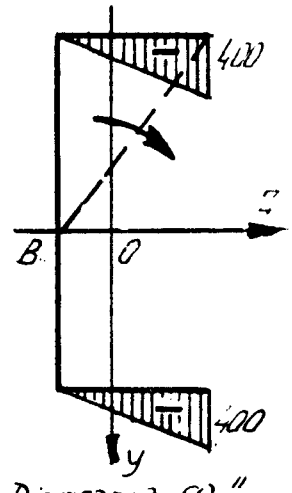


Diagrama „ω_B".

Fig.323

d) Momentele de inerţie axiale faţă de axele centrale - principale "YGZ"

$$I_Z = \frac{1x38^3}{12} + 2x2x20,5x20^2 = 37,330 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 1x36x6,66^2 + 2\left(\frac{2x20.5^3}{12} + 2x20,5x3,09^2\right) = 5.333 \text{ cm}^4$$

e) Momentele static sectorial-liniare $S_{\omega_B y}$ şi $S_{\omega_B z}$.

$$S_{\omega_B z} = \int_{(A)} \omega_o y dA$$

(integrăm cu regula lui Vereşceaghin, respectînd semnele).

în cazul de faţă :

$$S_{\omega_B z} = -2 \times \frac{20 \times 400}{2} \times 20 \times 20 = -320.000 \text{ cm}^5$$

$$S_{\omega_B Y} = \int_{(A)} \omega_o z dA = 0$$

Deoarece epura "Z" este simetrică (pentru tălpi), iar epura " ω_o'') antisimetrică.

f) Momentul de inerţie la răsucire.

$$I_r = \frac{1}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 = \frac{1,12}{3}\left(2 \times 20 \times 2^3 + 40 \times 1^3\right) = 134 \text{ cm}^4$$

g) Coordonatele centrului de încovoiere.

$$a_y = \frac{S\omega_o y}{I_y} = 0$$

$$A_z = \frac{S\omega_o z}{I_z} = -\frac{320.000}{37.330} = -8,58 \text{ cm}$$

Excentricitatea (e) de aplicare a sarcinei, devine :

e = 7,16 - 0,5 + 8,58 = 15,24 cm (faţă de centrul de încovoiere)

h) Diagrama coordonatelor sectoriale ale secţiunii, faţă de polul P. (pagina urmatoare)

$$\omega_{P,2} = \frac{8,58 \times 40}{2} = 171,5 \text{ cm}^2$$

$$\omega_{P,1} = \frac{(20-8,58)x40}{2} = 228,5 \text{ cm}^2$$

i) Momentul de inerţie sectorial al sectiunii.

$$I\omega = \int_{(S)} \omega^2 \cdot \delta \cdot ds$$

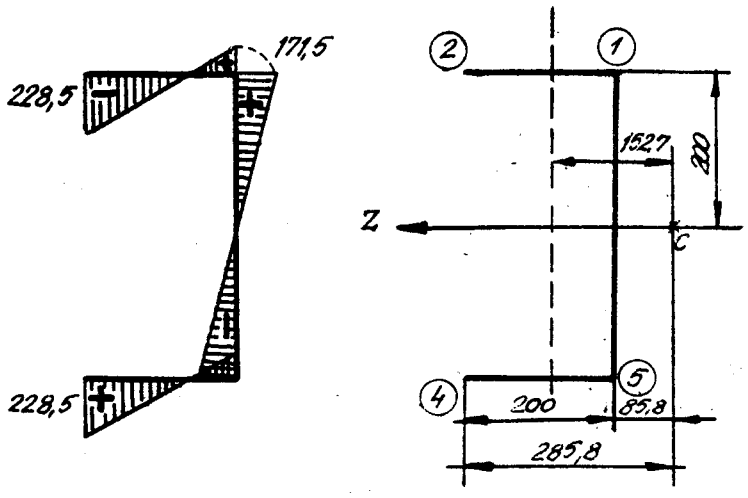


Fig. 324

In cazul nostru, (integrăm cu regula lui Vereşceaghin).

$$I_\omega = 2x2x\frac{20}{3}(228,5^2 + 171,5^2 - 228,5x171,5) + 2 \times \frac{171,5 \times 20}{2} \times \frac{2}{3} \times 171,5 = 1.527.000 \text{ cm}^6$$

g) Momentul static sectorial maxim

$$S_\omega^{max} = \int_{(A)} \omega_p dA = \Sigma\delta \int_{(s)} \omega_p ds$$

pentru tălpi,

$$S_\omega = 2\left(228,5.Z - \frac{400}{20} Z \frac{Z}{20}\right) = 457\ Z - 20\ Z^2.$$

Pentru: Z = 20 - 8,58 = 11,42 cm, se obţine valoarea maximă

$$S_\omega^{max} = 457 \times 11,42 - 20 \times 11,42^2 = 2.610 \text{ cm}^4$$

— Pentru inimă

$$S_\omega^{max} = 2 \times \frac{228,5-171,5}{2} \times 20 - (171,5y - \frac{171,5}{20} \times \frac{y^2}{2}) =$$

$$= 1140 - 171,5\ Y + 4,29\ y^2$$

Diagrama momentului static sectorial maxim este cea din figura alaturată.

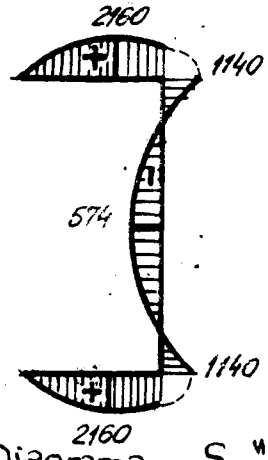


Diagrama S_ω

Fig.325

Caracteristica elastică la încovoiere - răsucire

$$\alpha = \sqrt{\frac{G.I_r}{E.I_\omega}} = \sqrt{\frac{810.000 \times 134}{2.100.000x1.527.000}}$$

$$= 0,0058 \frac{1}{cm}$$

$$\alpha.l = 0,0058 \times 400 = 2,32$$

$$(\alpha.l)_{lim} = 0,75$$

Deci, bimomentul nu se poate calcula aproximativ,

Va trebui să rezolvăm ecuaţia diferenţială a răsucirii neuniforme :

$$\varphi^{IV} - \alpha^2.\varphi = -\frac{m}{E\,I_\omega}$$

Unde :

$$m = \frac{d\,M_z}{dx}$$

Ecuaţia diferenţială a unghiului de răsucire (φ) neuniform

Prin datele problemei, avem o bară solicitată cu un moment de răsucire uniformdistribuit de-a lungul barei.

La capete avem reazeme simple contra răsuciri - adică rotirile în jurul axei longitudinale "Ox" ($\varphi = 0$) sînt împiedicate;

deplasările secţiunilor transversale pot să aibe loc ($\varphi'' = 0$).

Secţiunile transversale sînt libere de eforturi normale ($\sigma_\omega = 0$).

Condiţiile de reazem se scriu în modul următor :

$$\varphi_{x=0} = 0 \quad (1) \qquad \varphi_{x=l} = 0 \quad (3)$$

$$B_{x=0} = 0 \quad (2) \qquad B_{x=l} = 0 \quad (4)$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene a unghiului de răsucire, este :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi_0'}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x + \frac{B_0}{GI_r}(1+\operatorname{ch}\alpha x) + \frac{M_{x0}}{GI_r}\left(x - \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\alpha}\right) + \frac{1}{GI_r}\int_0^x \left[(x-t) - \frac{\operatorname{sh}\alpha(x-t)}{\alpha}\right] m(t)\,dt \quad (5)$$

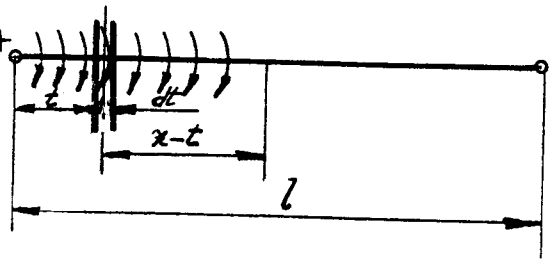


Fig. 326

Funcţia m (t) rezultă din modul de solitare a barei între extremităţi.

Punînd condiţiile (1) şi (2), rămîne :

$$\varphi = \frac{\varphi_0'}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x + \frac{M_{x0}}{GI_r}\left(x - \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\alpha}\right) + \frac{m}{\alpha^2 GI_r}\left[\frac{(\alpha x)^2}{2} + 1 - \operatorname{ch}\alpha x\right] \quad (6)$$

Parametrii φ_0' şi M_{r_0} îi putem găsi din condiţiile (3) şi (4).

Avînd în vedere simetria sistemului, faţă de mijlocul barei şi alegînd originea la mijlocul barei (aici $M_x = 0$), se poate scrie :

$$M_{r_0} = \frac{ml}{2} \text{ (la capete)}$$

Introducînd această mărime în ecuaţia (6) şi punînd condiţia (3), obţinem :

$$\frac{\varphi_0'}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha l + \frac{ml}{2GI_r}\left(l - \frac{\operatorname{sh}\alpha l}{\alpha}\right) + \frac{m}{\alpha^2 GI_r}\left[\frac{(\alpha l)^2}{2} + 1 - \operatorname{ch}\alpha l\right] = 0$$

De unde: $\varphi_0' = -\frac{m}{\alpha G I_r}\left(\frac{\alpha l}{2} - \frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\right)$ (7)

Acum, avînd expresia parametrilor iniţiali, obţinem expresia generală a unghiului de răsucire.

$$\varphi = -\frac{m}{\alpha^2 G I_r}\left(\frac{\alpha l}{2} - \frac{sh\frac{\alpha l}{2}}{ch\frac{\alpha l}{2}}\right) sh\alpha z + \frac{ml}{2G I_r}\left(z - \frac{sh\alpha z}{\alpha}\right) + \frac{m}{\alpha^2 G I_r}\left(\frac{\alpha^2 z^2}{2} + 1 - ch(z)\right) \quad (8)$$

Mai departe, folosim formulele :

$$M_\omega = -E I_\omega \cdot \varphi''$$

$$B = -E I_\omega \cdot \varphi''$$

se pot obţine expreiile momentului de răsucire - încovoiere şi bimomentului.

Lucrînd mai simplu, folosim datele din tabelul 7.2. şi obţinem :

$$B = -\varphi' \frac{G I_r}{\alpha} sh\alpha z + M_{r_0} \frac{sh\alpha z}{\alpha} + \frac{m}{\alpha^2}(ch\alpha z - 1)$$

înlocuind valorile lui φ' şi M_{r_0} şi efectînd transformările, obţinem :

$$B = \frac{m}{\alpha^2}\left[1 - \frac{ch\alpha\left(\frac{l}{2} - z\right)}{ch\frac{\alpha l}{2}}\right] \quad (9)$$

Acelaş rezultat se găseşte sistematizat în tabela 7.5.

Derivăm ($\frac{dB}{dx} = M_\omega$) şi obţinem :

$$M_\omega = \frac{m}{\alpha} \cdot \frac{sh\alpha\left(\frac{l}{2} - z\right)}{ch\frac{\alpha l}{2}} \quad (10) \text{(vezi tabela 7.2.)}$$

Determinarea factorilor de încovoiere - răsucire B şi M_ω

$$m = \text{p.e.} = \frac{4{,}25 \times 1000}{100} \times 15{,}24 = 650 \frac{kg\ cm}{cm}$$

Cu formulele (8), (9) şi (10) construim diagramele φ, φ', B, M_ω. (fig.327).

Valoarea "B_{max}" va fi la mijlocul grinzii

$$B_{max} = \frac{650}{0{,}0058^2}\left(1 - \frac{1}{ch\frac{0{,}0058 \times 400}{2}}\right) = 820 \times 10^4\ kg\ cm^2$$

Valoarea "M_ω^{max}" va fi pe reazeme :

$$M_\omega^{max} = \frac{650}{0{,}0058} \cdot th\frac{0{,}0058 \times 400}{2} = 91.000\ kg\ cm$$

Calculul eforturilor

I. Din răsucire

- Pentru mijlocul grinzii :

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega = \frac{820 \times 10^4}{1527 \times 10^3} \times \omega = 5{,}35 \cdot \omega \quad (11)$$

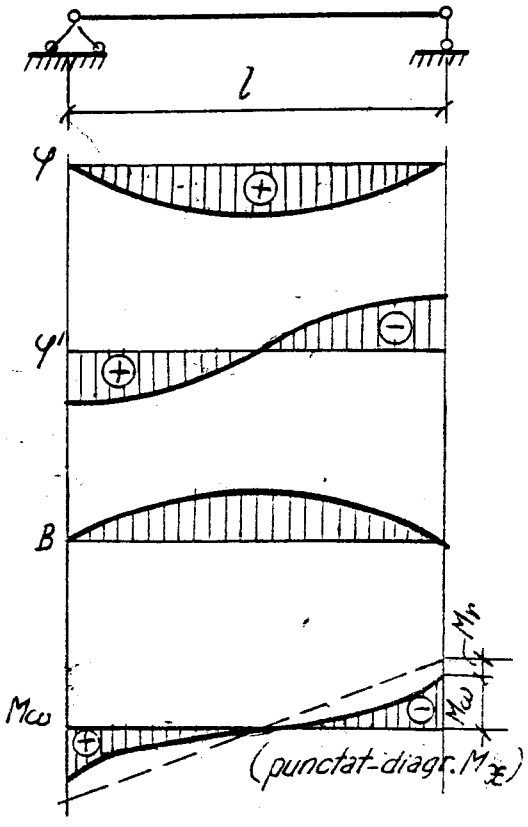


Fig. 327

- Pentru secţiunile de reazeme:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega^{max} \times S_\omega^{max}}{I_\omega \times \delta} = \frac{91 \times 10^3}{1527 \times 10^3} \times \frac{S_\omega^{max}}{\delta} = 0{,}0598 \frac{S_\omega^{max}}{\delta}. \quad (12)$$

a. Eforturile normale de răsucire " τ_ω " le găsim cu formula (11). Va trebui să amplificăm diagrama coordonatelor sectoriale ale secţiunii cu 5,35.

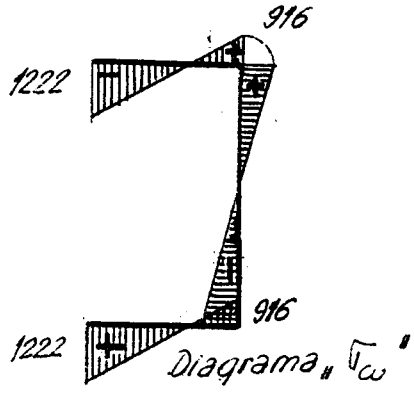


Fig. 328

b. Efortul tangenţial " τ_ω " maxim (pe reazem), la mijlocul inimii, este :

$$\tau_\omega = 0{,}0598 \times \frac{574}{1} = 34{,}5 \text{ kg/cm}^2 \quad (12')$$

În plus se mai adaugă un efort τ_{r_0}, produs de răsucirea liberă

Momentul de răsucire M_{r_0} - este :

$$M_{r_0} = \frac{m\,l}{2} = \frac{0{,}65 \times 4}{2} = 1{,}3 \text{ Tm}$$

- Partea din momentul de răsucire care corespunde răsucirii libere :

$$M_r = M_{x_0} - M_\omega \quad \text{(la reazim)}$$

$$M_r = 1{,}3 - 0{,}91 = 0{,}39 \text{ Tm}$$

Acest moment se distribuie la elementele profilului, (tălpi, inimă) proporţional cu rigiditatea la răsucire.

Rigiditatea inimii

$$G I_{r_2} = \frac{G \times 42 \times 1^3}{3} = 14\,G$$

Rigiditatea tălpii:

$$G I_{r_1} = \frac{G \times 21 \times 2^3}{3} = 56\,G$$

rp

Rigiditatea totală :

$2GI_{r_1} + GI_{r_2} = (2 \times 56 + 14)\ G = 126\ G.$

Inima se va încărca cu următorul moment de răsucire :

$M_{s_2} = 0{,}39 \times \frac{14\ G}{126\ G} = 0{,}0432$ Tm

Efortul tangenţial de răsucire în inimă, produs de momen. tul de răsucire, va fi :

$$\tau_o = \frac{M_{s2}}{M_{r_2}} \cdot \delta = \frac{4.320}{14} \times 1 = 308\ \frac{kg}{cm^2} \qquad (13)$$

Deci, efortul tangenţial " τ " total - din răsucire - va fi suma expresiilor (12') şi (13), adică :

$$\tau = 34{,}5 + 308 = 342{,}5\ \frac{kg}{cm^2} \qquad (14)$$

II.- Din încovoiere

a.- Eforturile normale " σ "

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y \quad \text{(la mijlocul grinzii, în talpi)}$$

Unde : $M = \frac{4.25 \times 4^2}{8} = 8{,}50$ Tm

$I_z = 37.330\ cm^4$

Rezultă :

$$\sigma = 22{,}7 \times y \qquad (15)$$

In punctele cele mai îndepărtate (y= 21 cm), efortul va fi:

$\sigma_{max} = 476\ kg/cm^2$

b). Eforturile tangenţiale " τ "

$$\tau = \frac{T_y \cdot S_z}{\delta \cdot I_z} \quad \text{(pe reazime, la mijlocul inimii)}$$

Unde: $T_y = \frac{4{,}25 \times 4}{2} = 8{,}5$ T

$S_z = 20 \times 2 \times 20 + 21 \times 1 \times 10{,}5 = 1.020\ cm^3$

$\delta = 1$ cm

Rezultă,

$$\tau = 232\ \frac{kg}{cm^2} \qquad (16)$$

Eforturile finale maxime din încovoiere-răsucire.

a). normale

$$\sigma = 916 + 476 = 1.392\ \frac{kg}{cm^2}$$

(în talpa superioară compresiune; în cea inferioară tensiune)

b) tangenţiale [vezi rezultatele (14) şi (16)]

$$\tau = 342,5 + 232 = 574,5 \ \frac{kg}{cm^2}$$

(în inimă, pe reazemul din stînga, pozitiv)

Tabela 7.1.

Valoarea coeficienţilor α_h, α_b şi β pentru o secţiune dreptunghiulară

h/b	1,0	1,2	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10	∞
α_h	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
α_b	0,208		0,270		0,309		0,354	0,379		0,402			0,448
β	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,308	0,312	0,333.

Tabela 7.2.

	φ_0	φ_0'	B_0	M_{z0}	m
φ	1	$\frac{sh\,\alpha z}{\alpha}$	$\frac{1}{GI_r}(1-ch\,\alpha z)$	$\frac{\alpha z - ch\,\alpha z}{\alpha^2 GI_r}$	$\frac{1}{\alpha^2 GI_r}\left(\frac{\alpha^2 z^2}{2} - ch\,\alpha z + 1\right)$
φ'	0	$ch\,\alpha z$	$-\frac{\alpha}{GI_r} sh\,\alpha z$	$\frac{1}{GI_r}(1-ch\,\alpha z)$	$\frac{1}{\alpha GI_r}(\alpha z - sh\,\alpha z)$
B_ω	0	$-\frac{GI_r}{\alpha} sh\,\alpha z$	$ch\,\alpha z$	$\frac{sh\,\alpha z}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}(ch\,\alpha z - 1)$
M_t	0	0	0	1	z

Tabela 7.3.

Caracteristicile sectoriale ale profilelor U (SATS 564/49)

Nr. profilului	Cordon. centrului de încovoiere „z" (cm)	Suprafaţa sectorială „ω_1" (cm^2)	Suprafaţa sectorială „ω_2" (cm^2)	Momentul sectorial de inerţie „I_ω" (cm^6)	Momentul sectorial de rezist. „W_{ω_1}" (cm^4)	Momentul sectorial de rezist. „W_{ω_2}" (cm^4)	Momentul de inerţie la răsucire pură „I_r" (cm^4)	Caracteristica de încovoiere-răsucire „λ" (cm^{-1})
6½	1,22	4,20	6,80	80,53	19,17	11,85	1,634	0,08.847
8	1,27	5,54	9,25	173,30	31,25	18,74	2,236	0,07.055
10	1,42	7,72	13,37	426,80	55,31	31,91	2,962	0,05.174
12	1,47	9,90	18,19	927,60	93,69	51,00	4,300	0,04.239
14	1,66	12,86	23,26	1843,00	143,29	77,23	6,017	0,03.549
16	1,77	15,75	29,33	3339,00	212,00	113,84	7,808	0,03.003
18	1,87	18,94	36,01	5700,00	300,92	158,28	9,977	0,02.598
20	1,97	22,29	43,45	9237,00	414,39	212,58	12,570	0,02.291
22	2,11	26,19	51,07	14887,0	568,49	291,48	16,979	0,02.097
24	2,21	30,06	59,81	22406,0	745,31	374,61	20,790	0,01.891
26	2,35	34,62	68,57	33849,0	977,86	493,60	27,100	0,01.758
30	2,77	45,82	87,37	70168,0	1531,50	803,08	40,590	0,01.494

Tabela 7.4.

Caracteristicile secteriale ale profilelor I
(STAS 565/49)

Nr. profilului	Suprafaţa sectorială maximă "ω" (cm^2)	Momentul secterial de inerţie "I_ω" (cm^6)	Momentul secterial de rezistenţă "W_ω" (cm^4)	Momentul de inerţie la răsucire "I_r" (cm^4)	Caracteristica de încovoiere-răsucire "α" (cm^{-1})
8	7,63	82,53	10,82	0,923	0,06.568
10	11,43	253,80	22,20	1,704	0,05.089
12	15,99	650,20	40,66	2,896	0,04.145
14	21,50	1.469,00	68,50	4,624	0,03.496
16	27,36	2.976,00	108,77	7,026	0,03.018
18	34,18	5.621,00	164,55	10,260	0,02.653
20	41,75	10.019,00	239,98	14,500	0,02.363
22	50,07	16.828,00	336,09	19,930	0,02.137
24	59,15	27.381,00	462,91	26,750	0,01.941
26	68,35	41.922,00	613,34	35,800	0,01.815
28	77,54	61.467,00	792,71	47,360	0,01.724
30	87,32	87.506,00	1.002,10	60,670	0,01.635
32	97,63	122.537,00	1.255,10	77,590	0,01.563
36	119,94	228.583,00	1.905,80	122,500	0,01.437
40	144,53	400.437,00	2.770,60	181,500	0,01.322

CAPITOLUL VIII

Solicitări axiale cu încovoiere

1.- Efortul unitar normal σ care ia naştere într-un punct S (z_s , y_s), cînd o forţă axială N acţionează excentric avînd un punct de aplicaţie cu coordonatele (z_o , y_o), are următoarea expresie :

$$\sigma_S = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y_s \pm \frac{M_y}{I_y} z_s$$

sau

$$\sigma_s = \pm \frac{N}{A} \left(1 \pm \frac{y_o\, y_s}{i_z^2} \pm \frac{z_o\, z_s}{i_y^2}\right)$$

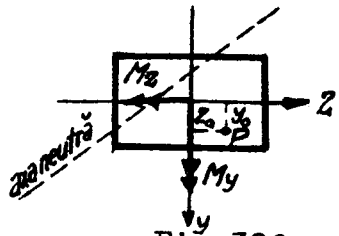


Fig.329

unde :

N - este forţa axială de întindere (+) sau compresiune (-)

M_z- este momentul încovoietor în raport cu axa z: $M_z = N \times y_o$

N_y- este momentul încovoietor în raport cu axa y: $M_y = N \times z_o$

I_z, I_y- momentele de inerţie ale secţiunii în raport cu axele z şi y

y_o, z_o- coordonatele punctului de aplicaţie a forţei

y_s, z_s- coordonatele punctului S în care calculăm efortul unitar normal.

Semnele $\pm$ se vor lua studiind fenomenul fizic şi apreciind sensul efortului unitar normal σ dacă este de întindere sau compresiune din fiecare solicitare N, M_z sau M_y.

2.- In cazul compresiunii excentrice, dacă alegem sensul axelor astfel ca sarcina să se aplice în cadranul 1, vom putea utiliza ca expresia a efortului normal unitar σ într-un punct S:

$$\sigma_s = - \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y_s - \frac{M_y}{I_y} z_s$$

avantajul acestei exprimări este că se poate face abstracţie de fenomenul fizic, semnul termenilor fiind dat de coordonatele punctului S - de poziţia lui în secţiune.

Axa neutră în acest caz este determinată de relaţia :

$$1 + \frac{y_o y}{i_z^2} + \frac{z\, z_o}{i_y^2} = 0$$

unde :

y_o şi z_o sînt coordonatele punctului de aplicaţie al forţei iar y şi z sînt coordonatele unui punct curent de pe axa neutră.

Axa neutră se poate exprima şi prin tăieturile pe care le face pe axele de coordonate :

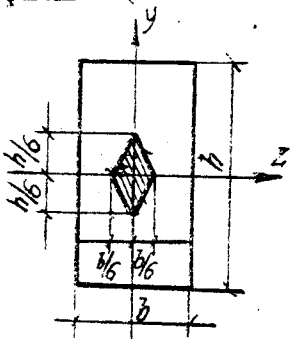
$$y = - \frac{i_z^2}{y_o}$$

$$z = -\frac{i_y^2}{z_0}$$

unde y şi z sînt segmentele pe care le intercepteaza axa neutră pe cele 2 axe de coordonate.

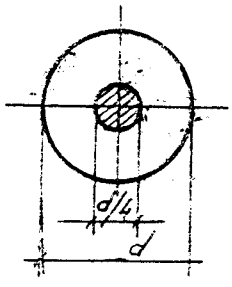
Axa neutră trece todeauna prin cadranul opus celui în care se aplică sarcina.

3.- Sîmburele central este locul geometric al punctelor care delimitează o zonă în interiorul sărcia, dacă se aplică sarcina, efortul unitar normal σ are acelaş semn pe întreaga secţiune (axa neutră este în afara secţiunii).



Dacă forţa se aplică în afara sîmburelui central, axa neutră intersectează secţiunea, iar cînd forţa calcă pe conturul sîmburelui central, axa neutră este tangentă la secţiune.

Pentru un dreptunghi sîmburele central este un romb avînd diagonalele $\frac{b}{3}$ şi $\frac{h}{3}$, iar pentru un cerc cu diametrul d, sîmburele central este tot un cerc cu diametrul $\frac{d}{4}$



In cazul unui element de construcţie de lungime infinită (practic foarte mare), sîmburele central este o fîşie avînd lăţimea $\frac{b}{3}$ (zona treimii mijlocii).

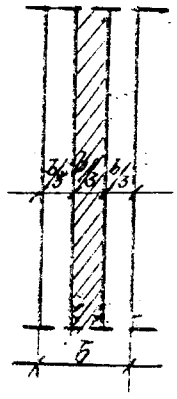


Fig.330

4.- Dacă forţa axială se aplică la distanţa "e" faţă de axa y, ieşind din zona sîmburelui central, la corpurile care nu preiau întindere (în special teren de fundaţie) se utilizează pentru presiunea maximă efectivă formula :

$$\sigma_{max} = \frac{2\,N}{3\,c_0 l}$$

unde $3\,c_0$ este zona activă - adică suprafaţa efectivă de contact dintre fundaţie şi teren.

In cazul cînd forţa axială se aplică excentric în raport cu ambele axe, presiunea maximă pe teren se va calcula cu expresia :

$$\sigma_{max} = n\,\frac{N}{A}$$

unde coeficientul k se va lua din tabelul anexat în funcţie de rapoartele:

$$\frac{z_0}{b} \text{ şi } \frac{y_0}{h}$$

unde :

b şi h sînt dimensiunile suprafeţei de fundare

z_0 şi y_0 sînt coordonatele punctului de aplicaţie a forţei.

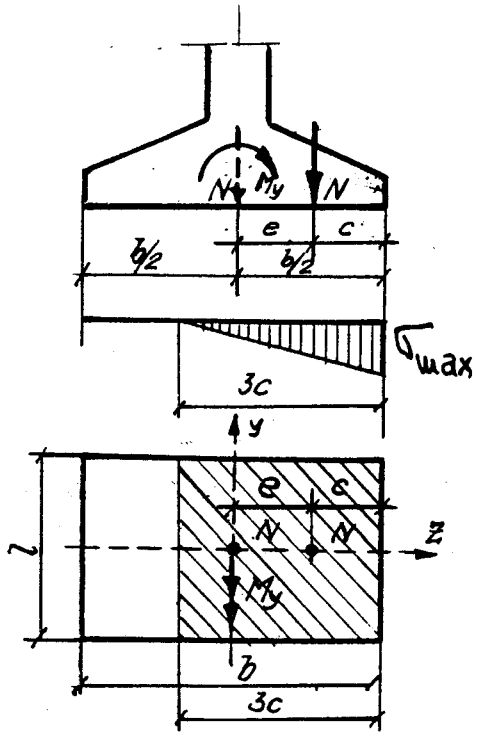


Fig.331

8.1.- Se dă un stîlp de colţ executat din piatră de talie de granit (σ_{ad}=30 kg/cm^2 şi γ = 2,8 T/m^3) avînd secţiunea 40x60 cm şi înălţimea de 3,50 m, este solicitat de o forţă excentrică P = 1,8 T.

Se cere :-să se calculeze σ_{max}

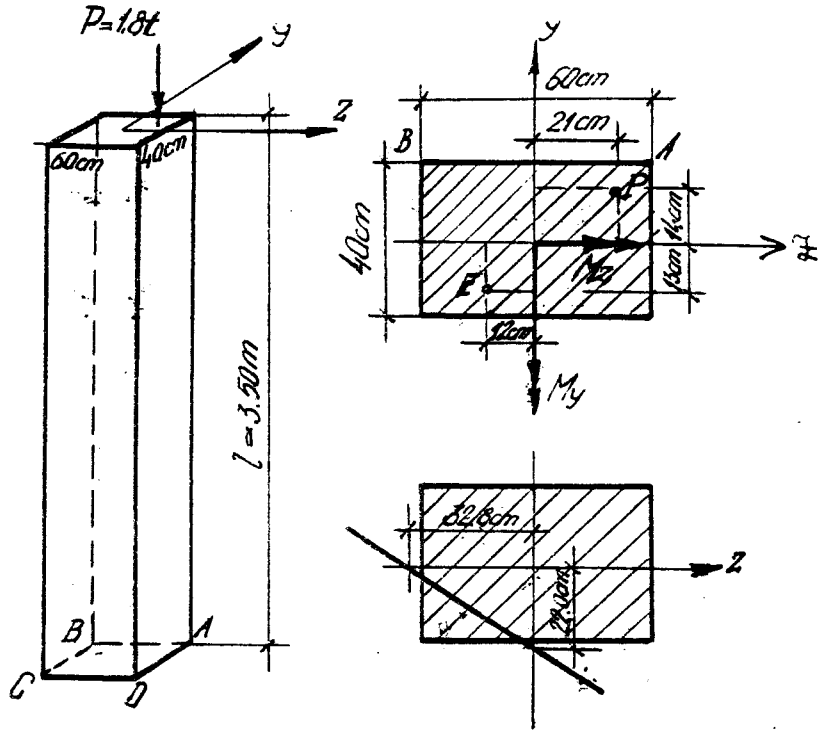


Fig. 332

- σ în toate colţurile secţiunii de la baza stîlpului şi în punctul E

- poziţia axei neutre.

Eforturile normale unitare din colţurile secţiunii (A, B,C,D) se determină cu relaţia :

$$\sigma_{ABCD} = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

unde: N=P+G= 1,8 + 0,4x0,6x3,5x2,8 = = 4,15 t = 4150 kg

Folosim formula generală

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z$$

A = 40 x 60 = 2400 cm^2

$$I_z = \frac{6 \times 4^3}{12} = 32 \text{ dm}^4$$

$$I_y = \frac{4 \times 6^3}{12} = 72 \text{ dm}^4$$

Momentele sînt îndreptate după cum se poate vedea în figură şi au valorile :

$M_z = 1800 \times 14 = 25.200$ kg cm

$M_y = 1800 \times 21 = 37,800$ kg cm

Primul termen e cu semnul minus pentru toate punctele secţiunii exprimînd compresiunea din forţa axială, al doilea şi al treilea exprimă întinderea sau compresiunea datorită momentului M_z şi respectiv M_y.

In punctul A-M_z provoacă compresiunea iar M_y de asemenea compresiune

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y_A - \frac{M_y}{I_y} z_A = -\frac{4150}{2400} - \frac{25200}{320000} 20 - \frac{37800}{720000} 30 = -$$

$$= -4,87 \text{ kg/cm}^2$$

In punctul B —M_z produce compresiune iar M_y întindere

$$\sigma_B = -\frac{4150}{2400} - \frac{25.200}{320000} \cdot 20 + \frac{37.800}{720000} \cdot 30 = -1,73 \text{ kg/cm}^2$$

In punctul C —M_z produce întindere şi M_y de asemenea întindere.

$$\sigma_C = -\frac{4150}{2400} + \frac{25200}{32000} \cdot 20 + \frac{37800}{720000} \cdot 30 = +1,41 \text{ kg/cm}^2$$

Solicitări

In punctul E apar aceleaşi numai distanţele y şi z se modifică

$$\sigma_E = -\frac{4150}{2400} + \frac{25.200}{320000} \cdot 13 - \frac{37800}{720000} \cdot 12 = -0,07 \text{ kg/cm}^2$$

In punctul D, efortul unitar normal va fi :

$$\sigma_D = -\frac{4150}{2400} + \frac{25.200}{320000} \cdot 20 - \frac{37.800}{720000} \cdot 30 = -1,73 \text{ kg/cm}^2$$

Se poate efectua calculul şi fără a ţine seama de sensul fizic al problemei eforturilor care iau naştere, aşezînd forţa exterioară P în cadranul 1 şi luînd coordonatele punctului cu semnele corespunzătoare.

Luăm ca exemplu punctul D [(z este (+) şi y este (-)]

Formula generală este

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D - \frac{M_y}{I_y} z_D = -\frac{4150}{2400} + \frac{25.200}{320000} \cdot 20 - \frac{37.800}{720000} \cdot 30 =$$

$$= -1,73 \text{ kg/cm}^2$$

Poziţia axei neutre va fi determinata de tăieturile pe care le face aceasta pe axele y şi z.

Axa neutră va trece neaparat prin cadranul III (în interiorul sau în afara secţiunii), adică prin cadranul simetric cadranului unde se aplică forţa exterioara.

Ecuaţia axei neutre este :

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

$$\sigma = -\frac{4150}{2400} - \frac{25.200}{320000} y - \frac{37.800}{720000} z = 0$$

p

pt. $y = 0 \quad z = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_y}{M_y} = -\frac{4150}{2400} \cdot \frac{720000}{37.800} = -32{,}8$ cm

pt. $z = 0 \quad y = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_z}{M_z} = -\frac{4150}{2400} \cdot \frac{320000}{25.200} = -22$ cm

8.2.- Să se trasează sîmburele central pentru un profil I 20.

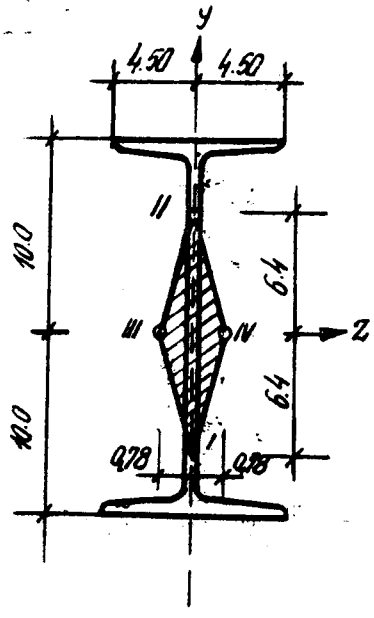


Fig. 333

Caracteristicile geometrice ale secţiunii profilului I 20 sînt:

$i_z^2 = 8{,}0^2 = 64$ cm^2

$i_y^2 = 1{,}87^2 = 3{,}5$ cm^2

Relaţiile care leagă coordonatele punctului de aplicaţie al forţei de tăieturile axei neutre sînt:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y} \text{ şi } z_0 = -\frac{i_y^2}{y}$$

unde y_0 şi z_0 sînt coordonatele punctului de aplicaţie al forţei iar z şi y segmentele interceptate pe axa neutră pe cele 2 axe de coordonate.

Cînd axa neutră trece prin punctele AB tăieturile ei pe cele 2 axe vor fi: $Z = \infty$ şi $y = 40$ cm

Punctul corespunzător de aplicaţie al forţei (punctul I) va avea următoarele coordonate:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y} = -\frac{64}{10} = -6{,}4 \text{ cm}$$

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z} = 0$$

Analog. ptr. pct. II : $y_0 = +6{,}4$ cm ; $z_0 = 0$

Punînd condiţia ca axa neutră să treacă prin punctele B şi D segmentele interceptate de ea pe cele două axe vor fi:

$y = \infty \qquad z = + 4,5$ cm

iar punctul de aplicaţie al forţei corespunzător va fi:

$y_0 = 0$

$$z_0 = - \frac{i_y^2}{z} = - \frac{3,5}{4,5} = - 0,78 \text{ cm}$$

In cazul cînd axa neutră (polară) va trece prin punctele A-C polul corespunzător al forţei va avea coordonatele :

$y_0 = 0$

$z_0 = + 0,78$ cm

Cele 4 puncte caracteristice reprezintă vîrfurile unui romb care delimitează sîmburele central.

Deci cînd axa neutră trece prin AB îi corespunde punctul I; în timp ce axa neutră se roteşte în jurul punctului B, , punctul de aplicaţie al forţei descrie dreapta I - III; cînd axa neutră trece prin punctele B D îi corespunde polul III etc.

8.3 Să se determine sîmburele cetral pentru un profil U 24.

Razele de giraţie care caracterizează geometric secţiunea (conform tabelelor) sînt:

$i_z = 9,22$ cm şi $i_y = 2,42$ cm

Relaţiile de legătură dintre poziţia polului (punctului de aplicaţie al forţei) şi polară (axa neutră) sînt următoarele :

$$y_0 = - \frac{i_z^2}{y} \text{ şi } y_0 = - \frac{i_y^2}{z}$$

unde y_0 şi z_0 sînt coordonatele punctului de aplicaţie al forţei iar y şi z sînt tăieturile axei neutre pe axele de coordonate.

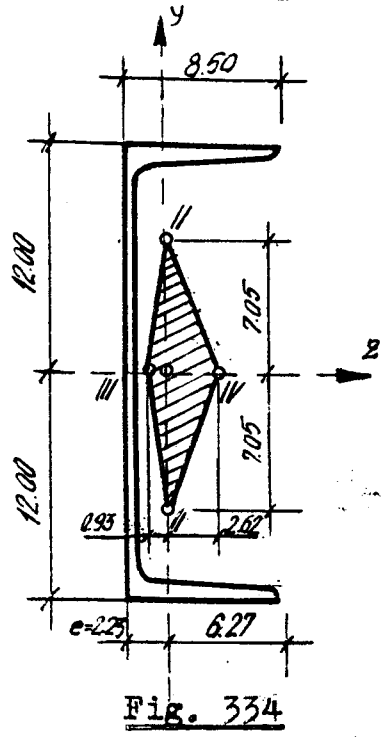


Fig. 334

Punînd condiţia ca axa neutră să treacă prin AB rezultă că coordonatele punctului I de aplicaţie al forţei:

$$y_0 = - \frac{i_z^2}{y} = - \frac{84,5}{12} = - 7.05 \text{ cm}$$

$$z_0 = - \frac{i_y^2}{z} = - \frac{5,84}{\infty} = 0$$

Cînd axa neutră se roteşte în jurul punctului B polul descrie dreapta I–III, iar cînd axa neutră trece prin punctele BC polul ajunge în punctul III. Coordonatele punctului III sînt date de expresiile :

$$y_0 = - \frac{i_z^2}{y} = - \frac{84,5}{\infty} = 0$$

$$z_0 = - \frac{i_y^2}{z} = - \frac{5,84}{6,27} = - 0,93 \text{ cm}$$

Cînd axa neutră se roteşte în jurul punctului C, punctul de aplicaţie al forţei descrie dreapta III–II. Punctului II îi corespunde poziţia axei neutre trecînd prin CD, coordonatele punctului II fiind date de relaţiile :

$$y_0 = - \frac{i_z^2}{y} = - \frac{84,5}{-12} = + 7,05 \text{ cm}$$

$$z_0 = - \frac{i_y^2}{z} = - \frac{5,84}{\infty} = 0$$

Cînd axa neutră trece prin punctele A D, punctul de aplicaţie al forţei este în punctul IV avînd următoarele coordonate :

$$y_0 = - \frac{i_z^2}{y} = - \frac{84,5}{\infty} = 0$$

$$z_0 = - \frac{i_y^2}{z} = - \frac{5,84}{-2,23} = + 2,62 \text{ cm}$$

In timp ce axa neutră s–a rotit în jurul punctului D ajungînd de la direcţia C D la D A punctul de aplicaţie al forţei a descris dreapta II–IV.

8.4. Se dă grinda din figură. Se cere să se calculeze σ şi τ precum şi direcţiile şi eforturile principale în punctul S situat la x = 5,00 m, şi y = 10 cm sub axa neutră. Grinda are secţiunea unui profil I 30. (figura 335).

Ca eforturi unitare apar,

- σ_N din forţa axială semnul (+)
- σ_M din momentul încovoietor semnul (+)

Aceste 2 eforturi unitare normale se adună cu semnul lor şi dau un efort unitar normal total

- τ apare din forţa tăietoare.

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{3000}{69,1} = 43,4 \text{ kg/cm}^2$$

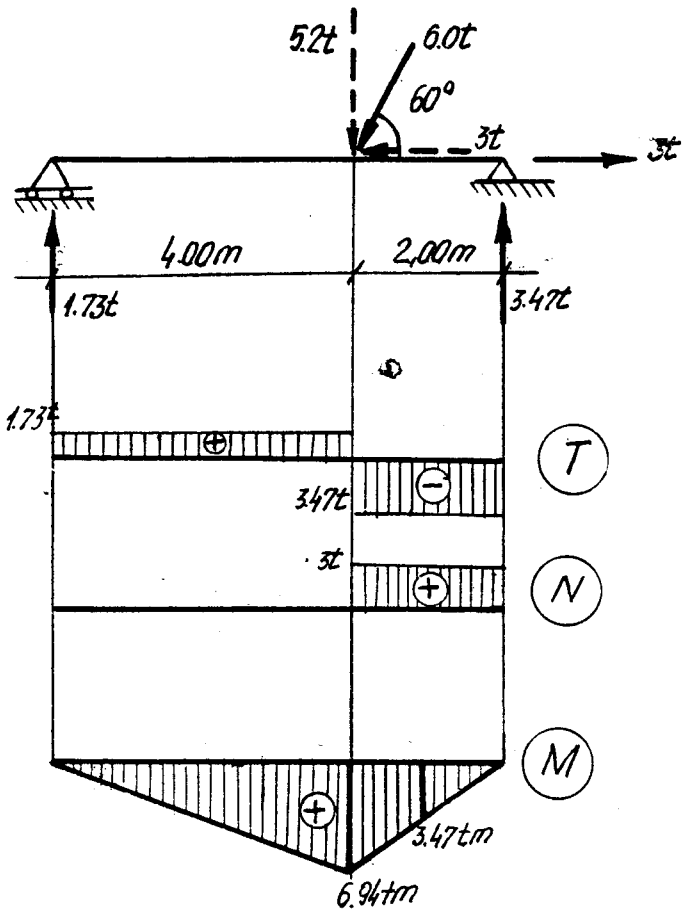


Fig. 335

$$\sigma_M = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{347000}{9800} \cdot 10 = 353 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{Total} = \sigma_N + \sigma_M =$$

$$= 43,4 + 353 = 396,4 \ kg/cm^2$$

τ se calculează cu formula lui Juravski:

$$\tau = \frac{T S}{b I}$$

$T = 3,47$ t

$S = 12,5x1,62x14,19 + 1,08x3,38x11,69 =$

$= 329,7 \ cm^3$

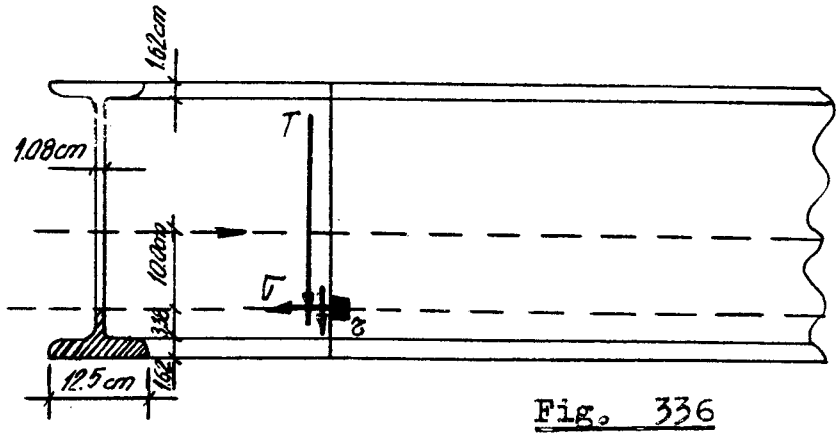
$I = 9800 \ cm^4$

$b = 1,08$ cm

$$\tau = \frac{3470x329,7}{1,08x9800} = 108 \ kg/cm^2$$

Direcţiile principale sînt:

$$tg2\alpha = \frac{2x108}{396,4} = 0,544$$



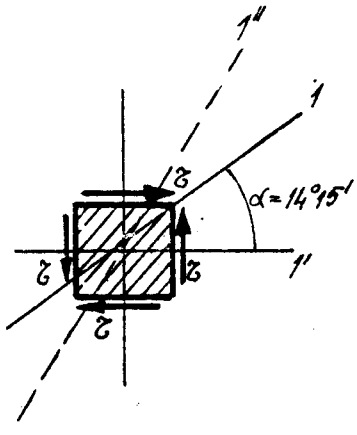


Fig. 336

$2\alpha = 28^0 \ 30'$

$\alpha = 14^0 \ 15'$

Eforturile unitare principale sînt date de relaţia :

$$\sigma_{1'2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{396,4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{396,4^2 + 4x108^2} = + 198,2 \pm$$

$$\pm \frac{100}{2} \ x \ 4,5 = 198,2 \pm 225. \ Deci :$$

$\sigma_1 = 423,2 \ kg/cm^2$

$\sigma_2 = - 26,8 \ kg/cm^2$

rp

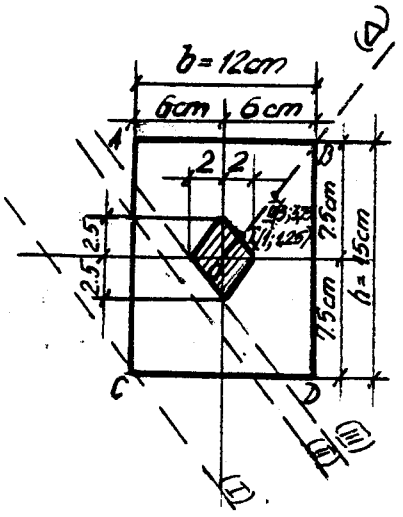


Fig. 337

8.5.- Se dă secţiunea din figură. Se cere determinarea poziţiei axei neutre cînd punctul de aplicaţie al sarcinei se deplasează după dreapta (Δ), trecînd prin patru puncte date :

O (0:0), I (1,0 cm: 1,25 cm),
II (3,00 cm: 3,75 cm) şi
III (6,00 : 7,50).

Intre coordonatele punctului de aplicaţie al forţei (z_o şi y_o) şi tăieturile determinate de axa neutră pe cele două axe de coordonate avem relaţia :

$$z = -\frac{i_y^2}{z_o}$$

$$y = -\frac{i_z^2}{y_o}$$

Cunoscînd că pătratul razelor de giraţie pentru o secţiune dreptunghiulară este:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{h^2}{12} = \frac{15^2}{12} = 18,8 \text{ cm}^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b^2}{12} = \frac{12^2}{12} = 12,0 \text{ cm}^2$$

vom putea determina poziţia axei neutre succesiv pentru cele 4 puncte cerute.

In cazul că forţa se aplică în punctul O $z_o=0$ şi $y_o=0$ se vede că $z=\infty$ şi $y=\infty$ adică axa neutră este la ∞ - fenomenul este o compresiune sau întindere centrică, repartiţia eforturilor unitare normale σ este constantă în secţiune.

Dacă forţa se aplică în punctul I axa neutră va intersecta axele de coordonate în:

$$z = -\frac{120}{1,0} = -12 \text{ cm}$$

$$y = -\frac{18,8}{1,25} = -15 \text{ cm}$$

Deci axa trece prin punctul C - lucrul pe care-l puteam prevede căci punctul I se găseşte pe conturul sîmburelui central.

Cînd punctul de aplicaţie al forţei ajunge în punctul II (3,00:3,75 cm), axa neutră devine dreapta (II) determinată de

tăieturile :

$$z = -\frac{12}{5} = -4 \text{ cm}$$

$$y = -\frac{18,8}{5,75} = -5 \text{ cm}$$

In momentul în care forţa se va aplica în punctul III - axa neutră (III) interceptează axele în punctele :

$$z = -\frac{12}{6} = -2 \text{ cm}$$

$$y = -\frac{18,8}{7,5} = -2,5 \text{ cm}$$

Se poate remarca faptul că dreptele (I), (II) şi (III) sînt paralele; cînd punctul de aplicaţie al forţei variază între O-I axa neutră trece în afara secţiunii, iar cînd acesta se deplasează între I, II şi III axa neutră intersectează secţiunea, deci secţiunea este solicitată de eforturi normale unitare σ avînd două sensuri.

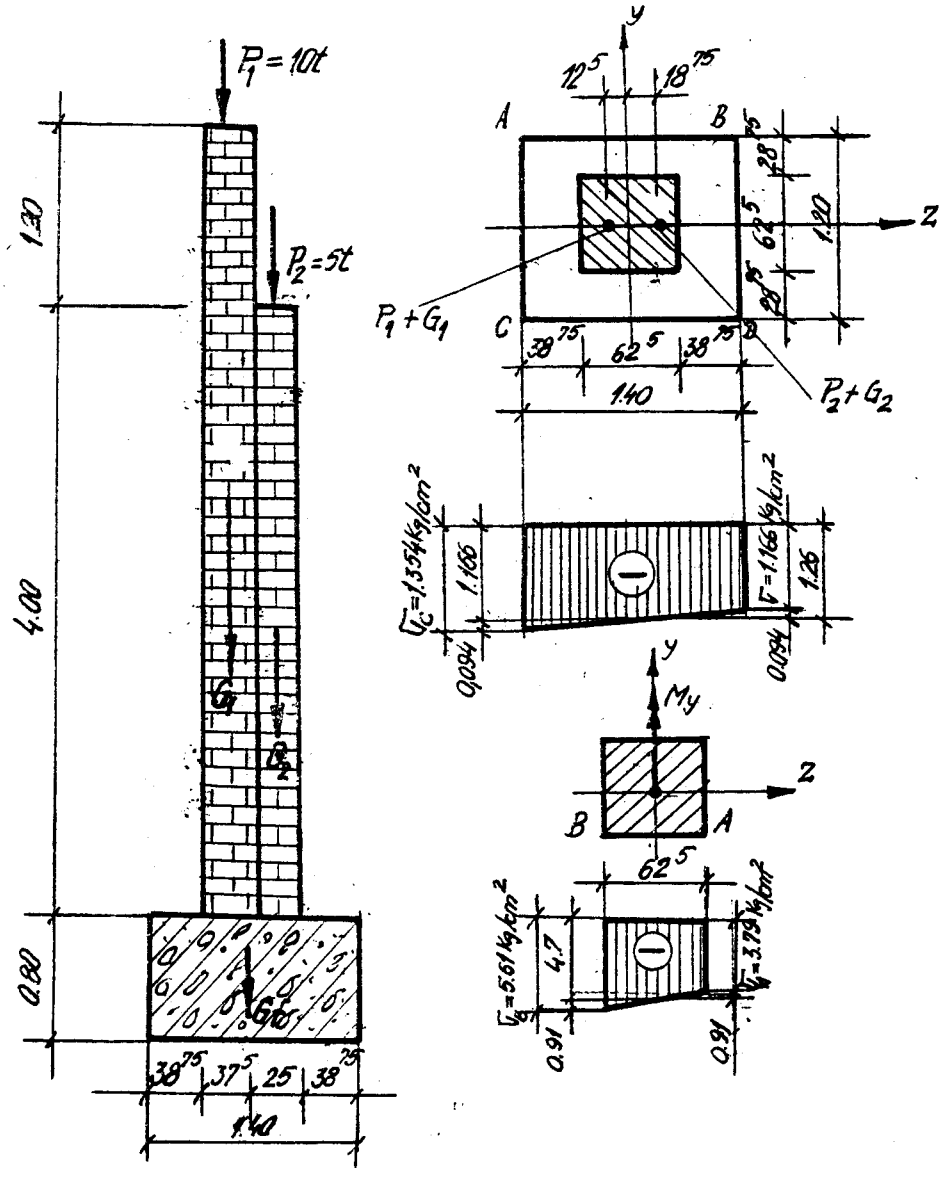


Fig. 358

8.6.- Se dă un stîlp de zidărie cu dimensiunile şi încarcările din figură. Se cer eforturile unitare normale maxime de la baza stîlpului precum şi presiunile maxime de pe teren.

Se dă: $\gamma_{zidărie} = 1,8\ T/m^3$

$\gamma_{beton\ simplu} = 2,2\ T/m^3$

Sarcinile din zidărie şi fundaţie se pot calcula:

$G_1 = 0,625 \times 0,375 \times 5,2 \times 1,8 = 2,19\ T$

$G_2 = 0,625 \times 0,25 \times 4,0 \times 1,8 = 1,13\ T$

$G_f = 1,2 \times 1,4 \times 0,8 \times 2,2 = 2,96\ T$

La baza stîlpului avem următoarele solicitări :

- forţa axială $N = (P_1 + G_1) + (P_2 + G_2)$

$N = (10,0 + 2,19) + (5,0 + 1,13) = 12,19 + 6,13 = 18,32\ T$

- momentul încovoietor M_y

$M_y = 12,19 \times 0,125 - 6,13 \times 0,1875 = 1,52 - 1,15 = 0,37\ Tm$

$A = 62,5 \times 62,5 = 3900\ cm^2$

$$W_y = \frac{62,5 \times 62,5^2}{6} = 40.700\ cm^3$$

$$\sigma_{A,B} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{M_y} = -\frac{18320}{3900} \pm \frac{37000}{40700} = -4,7 \pm 0,91 \begin{cases} \sigma_A = -3,79\ kg/cm^2 \\ \sigma_B = -5,61\ kg/cm^2 \end{cases}$$

Pentru determinarea presiunilor pe teren solicitările se vor schimba şi anume, forţa axială finală devine :

$N_f = N + G_f = 18320 + 2960 = 21.280\ kg$

momentul încovoietor rămîne acelaş deoarece axele y ale stîlpului şi ale fundaţiei coincid:

$M_y = 37000\ kg\ cm$

$A = 120 \times 140 = 16800\ cm^2$

$$W_y = \frac{120 \times 140^2}{6} = 392.000\ cm^3$$

$$\sigma_{CD} = -\frac{21280}{16800} \pm \frac{37000}{392000} = -1,26 \mp 0,094 \begin{cases} \sigma_C = -1,354\ kg/cm^2 \\ \sigma_D = -1,166\ kg/cm^2 \end{cases}$$

.7.- Se dă un baraj triunghiular din beton simplu. (fig. 39).

1. Se cere să se găsească o relaţie dintre b şi h ca la baza barajului sa nu existe tensiuni.

2. Să se determine relaţia care există între b şi h în cazul cînd se ţine seama de subpresiune.

Se dau : $\gamma_o = 1\ t/m^3$

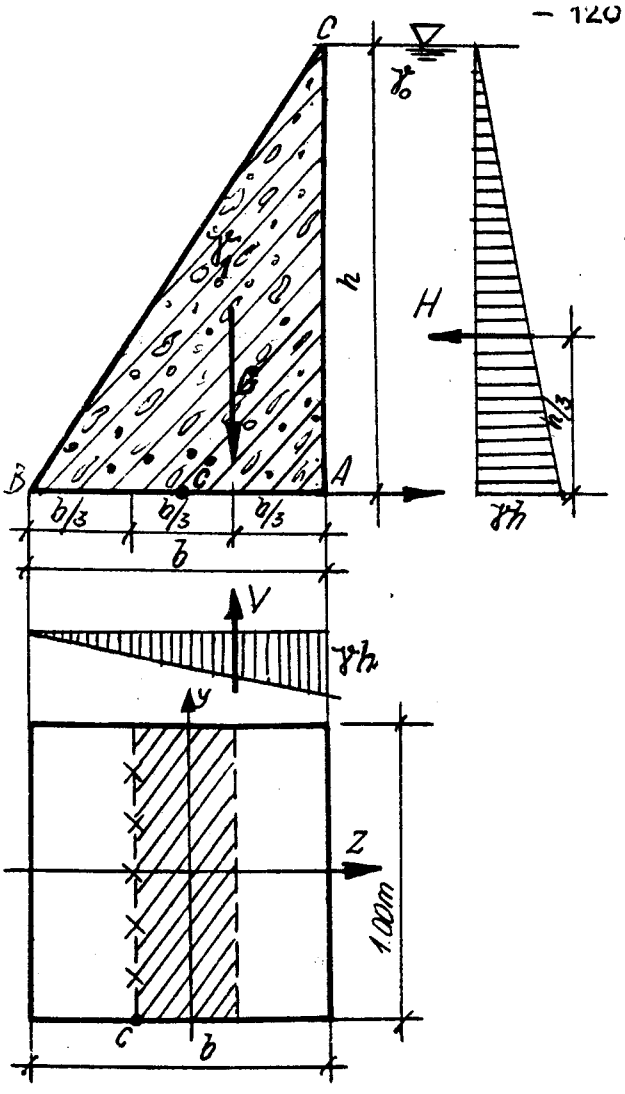


Fig. 339

$\gamma_1 = 2,2\ T/m^3$

$h = 20$ m

În cazul cînd nu ţinem seama de subpresiune avem numai 2 forţe care acţionează asupra barajului :

Greutatea proprie a barajului $G = \frac{b\ h_1}{2}\gamma_1$

Presiunea apei $H = \frac{h^2}{2}\gamma_o$

Ca să nu ia naştere tensiuni la baza barajului rezultanta forţelor trebuie să calce în interiorul sîmburelui central, la limita pe marginea treimii mijlocii (momentul în raport cu punctul C a celor 2 forţe trebuie să fie nul).

$H \cdot \frac{h}{3} = G\ (\frac{b}{2} - \frac{b}{3})$ sau

$$\frac{\gamma_o h^2}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b\ h}{2}\gamma_1 \cdot \frac{b}{6}$$

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{\gamma_o}{\gamma_1}} \text{ deci } b = h\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_o}}$$

numeric $b = 20 \times 0,67 = 13,4$ m

2. In cazul cînd ţinem seama de supresiune V - care acţionează la baza barajului a cărei repartiţie este triunghiulară dirijată de jos în sus:

$$V = \frac{\gamma_o\ h\ b}{2} \cdot 1$$

Asupra barajului acţionează trei forţe H, G şi V dintre care G şi V sînt pe aceiaşi verticală - dau o rezultantă.

$$G - V = \frac{b\ h}{2}\gamma_1 - \frac{b\ h}{2}\gamma_o = \frac{b\ h}{2}(\gamma_1 - \gamma_o)$$

Relaţia $H \cdot \frac{h}{3} = (G-V)\frac{b}{h}$ devine $\frac{\gamma_o h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b\ h}{2}(\gamma_1 - \gamma_o)\frac{b}{6}$

adică $\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{\gamma_o}{\gamma_1 - \gamma_o}}$ sau numeric $b = 0,91\ h = 18,2$ m

Se recomandă să se considere valoarea supresiunii redusă cu un factor în funcţie de calitatea betonului - coeficient care se poate lua 0,4 .

Relaţia dintre b şi h în acest caz devine.

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{\gamma_o}{\gamma_1 - 0{,}4\gamma_o}} = \sqrt{\frac{1}{2{,}2 - 0{,}4}} = \sqrt{\frac{1{,}0}{1{,}8}}$$

sau b = 0,745 h = 14,90 m

8,8.- Să se verifice fundaţia stîlpului din figură care din motive constructive nu a putut fi executată ca o fundaţie simetrică.

Se consideră că P, sarcina transmisă de stîlp este de 60 T, greutatea fundaţiei G_f = 6,4 T, iar rezistenţa admisibilă a terenului σ_{at} = 2,5 kg/cm^2

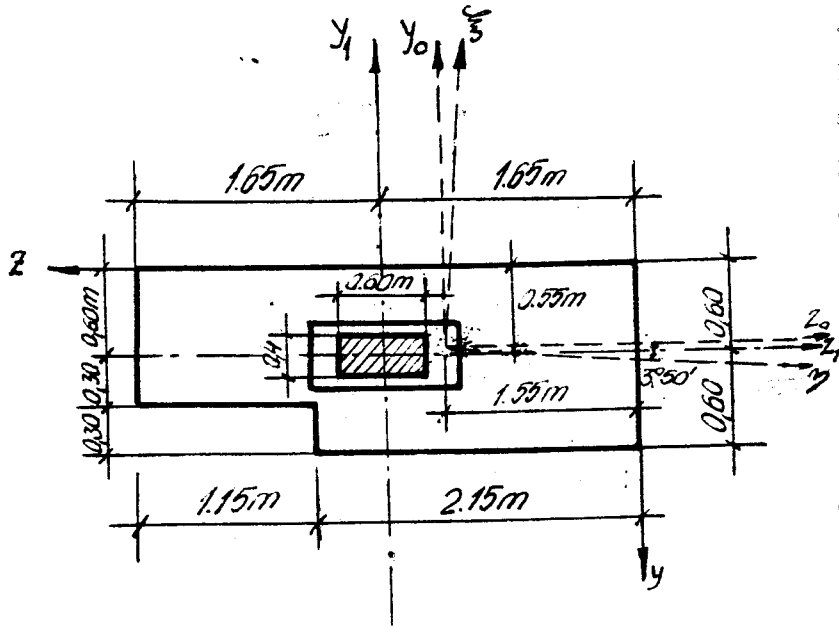


Fig. 340

Intrucît forţa P, nu se aplică în centrul de greutate al suprafeţei fundaţiei va avea loc fenomenul de compresiune excentrică (o compresiune şi o încovoiere în raport cu două direcţii).

Pentru a calcula presiunea (rezistenţa) maximă pe teren vom aplica formula :

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = -\frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta_{max} + \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi_{max}$$

unde axele ξ şi η sînt direcţiile principale de inerţie; pentru a le determina trebuie să calculă centrul de greutate al secţiunii O, precum şi momentul de inerţie I_{z_o}, I_{y_o} şi $I_{z_o y_o}$ în raport cu axele z_o şi y_o care trec prin centrul de greutate al secţiunii şi sînt paralele cu axele z şi y.

Coordonatele centrului de greutate sînt:

$$y_G = \frac{2{,}15 \times 1{,}20 \times 0{,}60 + 1{,}15 \times 0{,}9 \times 0{,}45}{2{,}15 \times 1{,}20 + 1{,}15 \times 0{,}9} \cong 0{,}56 \text{ m}$$

$$z_G = \frac{0{,}9 \times 3{,}30 \times 1{,}65 + 2{,}15 \times 0{,}30 \times 1{,}075}{2{,}15 \times 1{,}20 + 1{,}15 \times 0{,}9} = 1{,}54 \text{ m}$$

Momente de inerţie axiale şi centrifugale I_{z_o}, I_{y_o} şi $I_{z_o y_o}$ se vor determina în felul următor :

$$I_{z_0} = \frac{33 \times 9^3}{12} + 33x9x1,1^2 + \frac{21,5 \times 3^3}{12} + 21,5x3x4,9^2 = 3960 \text{ dm}^4$$

$$I_{y_0} = \frac{9 \times 33^3}{12} + 9x33x1,1^2 + \frac{3x\ 21,5^3}{12} + 21,5x3x4,65^2 = 31,260 \text{ dm}^4$$

$$I_{z_0y_0} = 9x33\ (-1,1)(+1,1)+21,5x3\ (+4,65)(-4,9) = -\ 1830 \text{ dm}^4$$

Determinarea direcţiilor principale de inerţie şi a momentelor principale de inerţie se face analitic.

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\ I\ z_0y_0}{I_{y_0} - I_{z_0}} = \frac{2 \times 1830}{31260-3950} = 0,134$$

$$2\alpha = 7^0\ 40'$$

$$\alpha = 3^0\ 50'$$

Deci practic direcţiile principale ξ şi η se pot confunda chiar cu direcţiile y_0 şi z_0.

Momentele principale de inerţie sînt:

$$I_{1,2} = I_{\xi,\eta} = \frac{31260+3950}{2} \pm \frac{1000}{2}\sqrt{(31,26-3,95^2) + 4 \times 1,83^2}$$

$$I_1 = I_\xi = 17605 + 14,150 = 31.755 \text{ dm}^4$$

$$I_2 = I_\eta = 17605 - 14150 = 3455 \text{ dm}^4$$

Solicitările asupra terenului de fundaţie al stîlpului sînt următoarele :

$$N=P+G_f = 60 + 6,4 = 66,4 \text{ T}$$

$$M_{y_0} = 60 \times 0,11 = 6,6 \text{ Tm}$$

$$M_{z_0} = 60 \times 0,04 = 2,4 \text{ Tm}$$

Vectorii momentelor M_{y_0} şi M_{z_0} se proiectează pe direcţiile principale.

$$M_\eta = M_{z_0} \cos 3^0 50' + M_{y_0} \sin 3^0 50' = 2,4x0,998+6,6x0,067=2,8 \text{ Tm}$$

$$M_\xi = M_{y_0} \cdot \cos 3^0 50' - M_{z_0} \sin 3^0 50' = 6,6x0,998 - 2,4x0,067=6,46 \text{ Tm}$$

Pentru a se vedea care din punctele A,B,C,D sau E e cel mai puternic solicitat trebuie să determinăm poziţia axei neutre :

$$\sigma = -\left[\frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta + \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi\right] = 0$$

dacă $A = 3,30 \times 0,90 + 2,15 \times 0,30 = 3,61 \text{ m}^2$

atunci ecuaţia axei neutre devine :

$$\sigma = 0 = -\left[\frac{66400}{36100} + \frac{646000}{317550000}\eta + \frac{280000}{34550000}\xi\right] = 0$$

sau $1,83 + 0,00203\,\eta + 0,00081\,\zeta_3 = 0$

Ptr. $\eta = 0$ $\quad \zeta_3 = -\frac{1,83}{0,00081} = -2270$ cm $= -22,70$ m

Ptr. $\zeta_3 = 0$ $\quad \eta = -\frac{1,83}{0,00203} = -900$ cm $= -9,00$ m

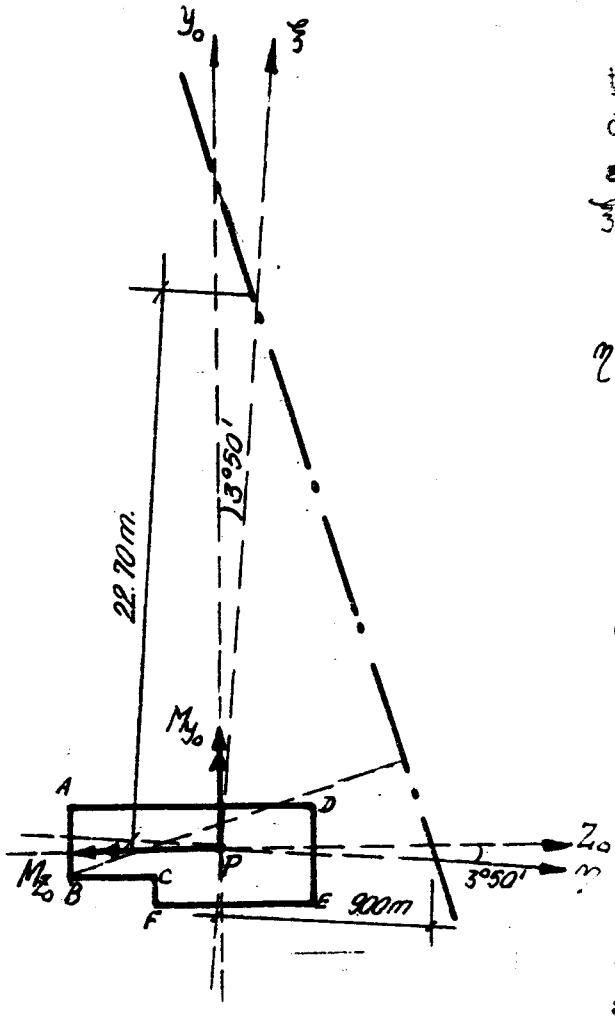


Fig. 341

Se poate urmări şi pe schiţe că punctul cel mai depărtat de axa neutră este punctul B ale cărui coordonate sînt:

$\zeta_{3B} = y_0 \cos\alpha + z_0 \sin\alpha = 34 \cdot \cos 3^\circ 50' + 176 \sin 3^\circ 50' =$
$= 34 \times 0,998 + 176 \cdot 0,067 = 44$ cm

$\eta_B = z_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha =$
$176 \cos 3^\circ 50' - 34 \sin 3^\circ 50' =$
$= 176 \cdot 0,998 - 34 \cdot 0,067 = 152$ cm

Ca valoare numerică presiunea maximă în punctul B este :

$$\sigma_B = -\left[\frac{N}{A} + \frac{M_{\zeta_3}}{I_{\zeta_3}}\eta_B + \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta_{3B}\right]$$

$$\sigma_B = -\left[\frac{66400}{36100} + \frac{646000}{317550000} \times \right.$$
$$\left. \times 152 + \frac{280000}{34550000} \cdot 44\right] =$$
$$= -2,50 \text{ kg/cm}^2$$

8.9.- Se dă un stîlp de beton armat avînd o fundaţie-cuzinet-bloc supusă la o forţă excentrică (fig.342).

Se cere, să se determine cum trebuie să se aşeze blocul de fundaţie astfel ca repartiţia presiunilor pe teren să fie uniformă şi să se calculeze valoarea acestei presiuni.

Se dă : $\gamma_{ba} = 2,4$ T/m^3 (beton armat)
$\gamma_{bs} = 2,2$ T/m^3 (beton simplu)

Reducînd sistemul de forţe din stîlp în secţiunea AB obţinm o forţă axială $N = P + G_1 + G_c$ şi un moment $M_{y1} = P \cdot e$ aplicate la distanţa d faţă de axele z_0 şi y_0 ale secţiunii AB.

Ca să avem o compresiune centrică (o repartiţie uniformă

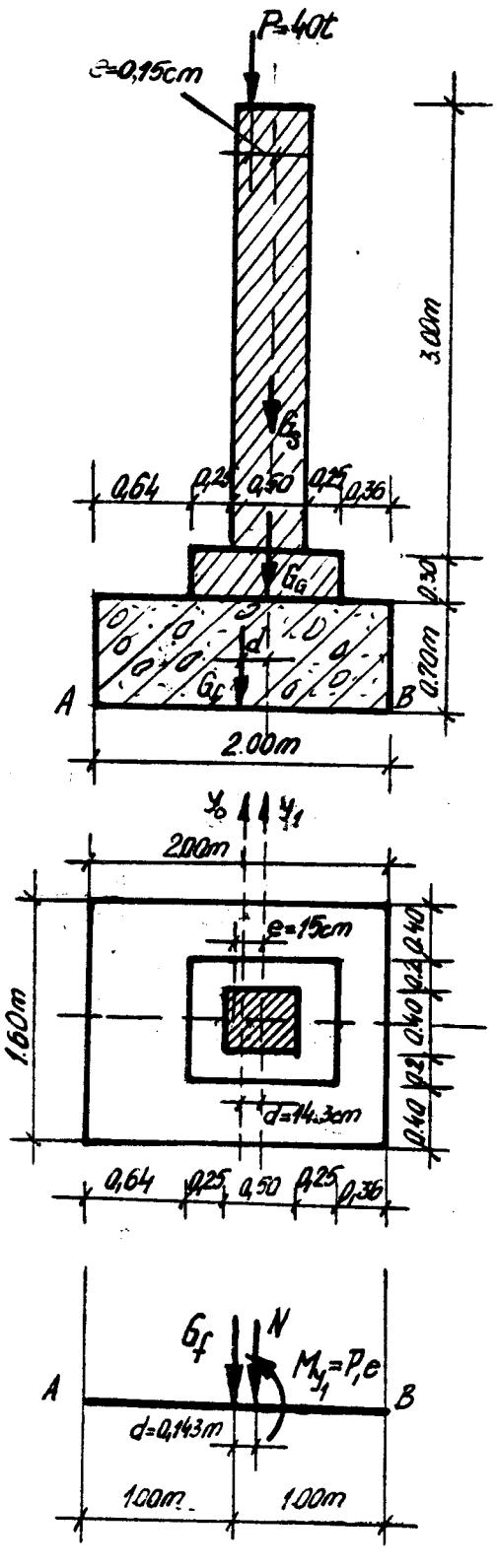


Fig.342

a presiunilor) trebuie ca tot sistemul de solicitări din stîlp să se reducă la o forţă aplicată excentric faţă de axele y_1 şi z şi anume la distanţa:

$$d = \frac{M_{y1}}{N}$$

$G_s = 0,4x0,5x3,0x2,4 = 1,44$ T

$G_c = 1,0x0,8x0,3x2,4 = 0,58$ T

$G_f = 2,00x1,6x0,7x2,2 = 4,5$ T

$N = 40+1,44+0,58 = 42,02$ T $\cong 42$ T

$M_{y1} = P \times e = 40 \times 0,15 = 6$ Tm

Distanţa d va fi egală cu :

$$d = \frac{M_{y1}}{N} = \frac{600.000}{42.000} = 14,3 \text{ cm}$$

$$\sigma = \frac{N+G_f}{A} = \frac{42,000+4,500}{200 \times 160} = 1,45 \frac{kg}{cm^2}$$

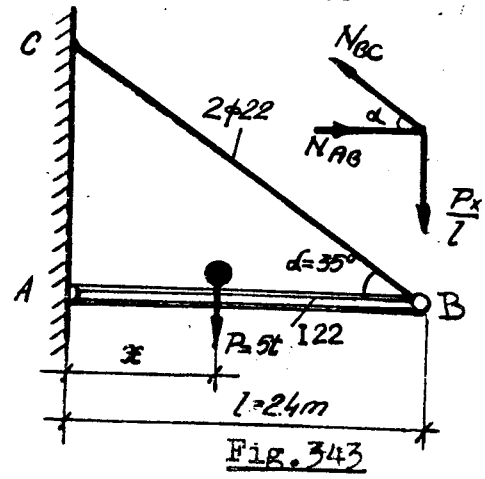


Fig.343

8.10.- Se dă sistemul de bare din figură format din tirantul CB avînd o secţiune compusă din 2 Ø 22 şi grinda AB avînd secţiunea dintr-un profil I 22.(x)

Se cere să se verifice efortul maxim din grindă şi tirant, încărcarea fiind dată de o sarcină mobilă P = 5 T.

Efortul din tirantul BC se va determina scrlind ecuaţiile de proiecţii pe orizontală şi verticală în nodul B a celor 2 eforturi N A C şi N B C şi a forţei provenite din acţiunea sarcinei pe bara AB. Vom avea astfel :

(x) Nu s-a ţinut seama de fenomenul de flambaj.

$$\frac{P\,x}{l} = N_{BC} \sin \alpha$$

$$N_{BC} \cos \alpha = N_{AB}$$

De aici se poate deduce expresia efortului N_{BC} :

$N_{BC} = \frac{P\,x}{l \sin \alpha}$ iar efortul din tirant va avea valoarea maximă atunci cînd forţa P va călca în punctul B adică cînd x = l.

$$N_{BC\ max} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{5000}{0,57} = 8800 \text{ kg}$$

Suprafaţa secţiunii unei bare de oţel rotund $\emptyset$ 22 este 3,8 cm^2

Deci rezistenţa efectivă în tirant este :

$$\sigma_{ef} = \frac{N_{BC}}{A_{ef}} = \frac{8800}{7,6} = 1155 \text{ kg/cm}^2$$

Grinda AB este supusă la încovoiere şi la compresiune deci verificarea ei se va face cu formula :

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{ad}$$

Expresia forţei axiale N_{AB} şi a momentului încovoietor M_z sînt:

$$N_{AB} = N_{BC} \cos \alpha = \frac{P\,x}{l \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{P\,x}{l\ tg\,\alpha}$$

$$M_z = \frac{P\,x\,(l - x)}{l}$$

Pentru a vedea în ce secţiune efortul σ este maxim vom scrie expresia efortului unitar normal maxim şi apoi anulînd derivaţia $\frac{d\sigma}{dx}$ vom găsi valoarea lui x pentru care este maxim.

$$\sigma_{max} = \frac{P\,x}{l\ tg\alpha\ A} + \frac{P\,x\,(l-x)}{l\ W_z} = \sigma_{ad}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{l\ tg\alpha\ A} + \frac{P\,(l - 2x)}{l\ W_z} = 0$$

de unde :

$$x = \frac{W_z}{2} \left(\frac{1}{tg\alpha\ A} + \frac{1}{W_z}\right)$$

In cazul nostru $x = \frac{278}{2} \left(\frac{1}{39,6 \times 0,70} + \frac{240}{278}\right) = 125$ cm = 1,25 m

Momentul încovoietor M_x şi forţa axială N_x corespunzătoare acestei secţiuni sînt :

$$M = \frac{Px\,(l-x)}{l} = 5 \times \frac{1,25 \times 1,15}{2,4} = 3,00 \text{ Tm}$$

$$N_x = \frac{P\,x}{l\,tg\alpha} = \frac{5 \times 1{,}25}{2{,}4 \times 0{,}7} = 3{,}72\ t$$

Atunci efortul unitar normal maxim în grinda AB va fi:

$$\sigma_{ef} = \frac{3720}{39{,}6} + \frac{300000}{278} = 1175\ kg/cm^2 \leqslant \sigma_a = 1400\ kg/cm^2$$

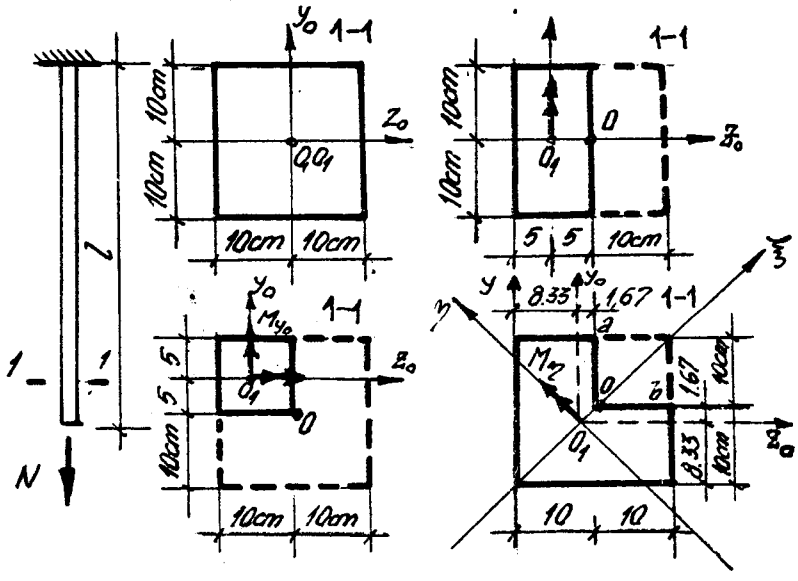


Fig. 344

8.11.- Se da bara din lemn din figura alaturata. Se cere să se calculeze care este forţa maximă N care se poate aplica în punctul O pentru cele 4 variante (I), (II), (III) şi (IV).

Se va lua rezistenţa admisibilă a lemnului la întindere şi la compresiune

$$\sigma_a = 100\ kg/cm^2$$

(I). In prima variantă punctul de aplicaţie al forţei O coincide cu centrul de greutate al secţiunii O_1, deci bara este supusă la o întindere centrică.

Forţa maximă N care se poate aplica este :

$$N_{max} = N_{cap} = \sigma_a \times A_{ef} = 100 \times 20 \times 20 = 40.000\ kg$$

(II) In cazul II sarcina se aplică în O deci secţiunea este supusă la o forţă de întindere N şi la un moment încovoietor $M_{y_0} = N \times 5$.

In acest caz putem scrie relaţia :

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} + \frac{N_{max} \cdot 5}{W_y} \leqslant \sigma_{ad}$$

unde : $A = 10 \times 20 = 200\ cm^2$

$$W_y = \frac{20 \times 10^2}{6} = \left(\frac{2000}{6}\right)\ cm^3$$

Atunci : $$\frac{N_{max}}{200} + \frac{N_{max} \cdot 5}{\frac{2000}{6}} = 100\ kg/cm^2$$

de unde reiese : $N_{max} = 5000\ kg$

(III) In cazul variantei (III), forţa N fiind aplicată în

punctul O în raport cu centrul secţiunii O_1, avem pe lîngă o solicitare axială de întindere N şi două momente încovoietoare M_{y_o} şi M_{z_o}

Relaţia din care va rezulta valoarea forţei N_{max} va fi :

$$\sigma_{max} = + \frac{N_{max}}{A} + \frac{M_{z_o}}{W_{z_o}} + \frac{M_{y_o}}{W_{y_o}} \leqslant \sigma_a$$

unde : $A = 10 \times 10 = 100\ cm^2$

$$W_{z_o} = W_{y_o} = \left(\frac{10 \times 10^2}{6}\right)\ cm^3$$

$$M_{z_o} = M_{y_o} = (N_{max} \cdot 5)\ kg \cdot cm$$

Inlocuind expresia de mai sus, rezultă :

$$\frac{N_{max}}{100} + \frac{N_{max} \cdot 5}{\frac{1000}{6}} + \frac{N_{max} \cdot 5}{\frac{1000}{6}} = 100\ kg/cm^2$$

de unde :

$$N_{max} = \frac{10000}{7} = 1430\ kg$$

(IV) Considerînd axele z şi y în figură vom calcula la început centrul de greutate al secţiunii O_1 şi momentele de inerţie, centrale I_{z_o} ; I_{y_o} şi $I_{z_o y_o}$

Coordonatele centrului de greutate vor fi :

$$z_o = y_o = \frac{10 \times 20 \times 10 + 10 \times 10 \times 5}{10 \times 20 + 10 \times 10} = 8{,}33\ cm$$

iar momentele de inerţie corespunzătoare axelor y_o şi z_o vor fi:

$$I_{z_o} = I_{y_o} = \frac{10 \times 20^3}{12} \times 1{,}67^2 + \frac{10 \times 10^3}{12} + 10x10x3{,}33^2 = 9158\ cm^4$$

$$I_{z_o y_o} = 10 \times 20(+1{,}67)(-1{,}66) + 10 \times 10(6{,}66)(-3{,}33) = -2786\ cm^4$$

Direcţiile principale sînt înclinate la 45^0 (căci avem o axă de simetrie la 45^0). Ceea ce rezultă şi din relaţiile analitice :

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ I_{z_o y_o}}{I_{y_o} - I_{z_o}} = \infty \longrightarrow \alpha = 45^0$$

iar valorile momentelor principale de inerţie vor fi :

$$I_{1,2} = \frac{I_{z_o} + I_{y_o}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{z_o} - I_{y_o})^2 + 4\ I_{z_o y_o}^2} = 9158 \pm 2786 = \begin{cases} I_\xi = I_1 = 11.944\ cm^4 \\ I_\eta = I_2 = 6372\ cm^4 \end{cases}$$

In varianta (IV) acţionează ca solicitări: o forţă axială de întindere N_{max} şi un moment încovoietor în raport cu axa η ($M_\eta = N_{max} e$).

In acest caz se poate scrie :

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} + \frac{M_\eta}{I_\eta} \xi_{max} \leq \sigma_{adm}$$

unde: $M_\eta = N_{max} e = N_{max}\ (1,67 \cdot 1,41) = (N_{max} \cdot 2,35)$ kg cm

$A = 10 \times 20 + 10 \times 10 = 300\ cm^2$

Momentul încovoietor M_η produce întinderea maximă în punctele (a) şi (b); corespunzător acestor puncte, rezultă :

$$\xi_{max} = \xi_a = \xi_b = (2,35 + 10 \cdot \cos 45^\circ) = 2,35 + 10 \times 0,71 = 9,45\ cm$$

Deci relaţia de mai sus devine :

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{300} + \frac{N_{max} \cdot 2,35}{6372} \cdot 9,45 = \sigma_a = 100\ kg/cm^2$$

De unde se poate stabili valoarea N_{max} :

$$0,333\ N_{max} + 0,348\ N_{max} = 10000\ kg$$

$$N_{max} = \frac{10000}{0,621} = 14,700\ kg$$

8.12.- De un stîlp de lemn de înălţime mică (nu există pericol de flambaj), avînd dimensiunile 12 x 15 cm este ataşată o consolă avînd lungimea de 60 cm avînd ca direcţie dreapta care trece prin centrul şi prin colţul secţiunii. Să se determine ce forţă maximă se poate aşeza pe vîrful consolei.

$$\sigma_{ad} = 100\ kg/cm^2$$

Ce solicitări asupra stîlpului vor acţiona o forţă P şi un moment M = (60 P) kg cm normal pe planul de acţiune al forţei P - după cum se vede din figura de mai jos

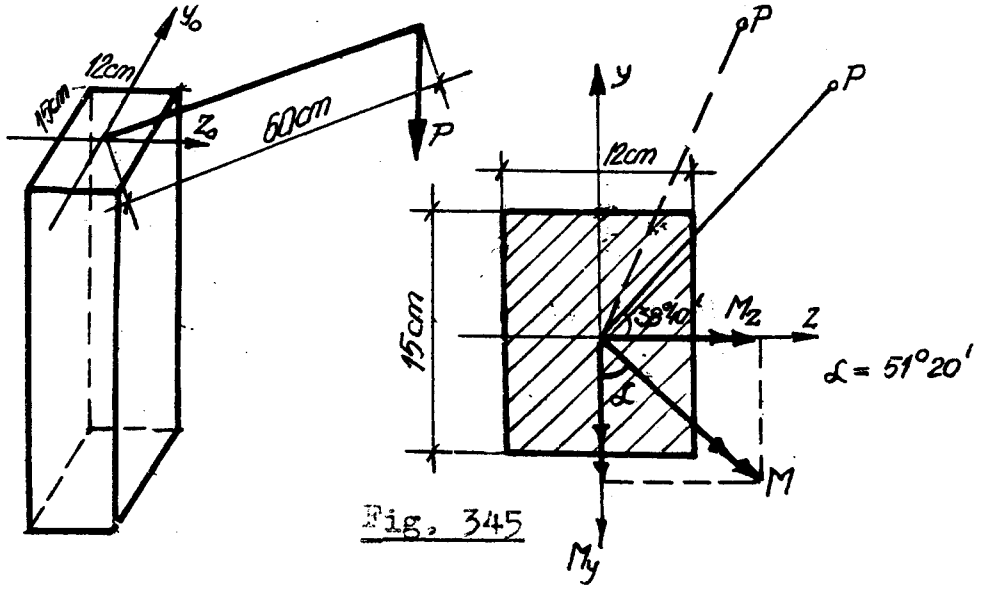


Fig. 345

$$tg\alpha = \frac{7,5}{6,0} = 1,25$$

$$90^0 - \alpha = 38^0 40'$$

$$\alpha = 51^0 20'$$

$$\sin\alpha = 0,783$$

$$\cos\alpha = 0,624$$

Componentele vectorului momentului încovoietor M sînt :

$M_z = M \sin\alpha = 60\ P.\ 0,783 = (47\ P)$ kg/cm

$M_y = M \cos\alpha = 60\ P.\ 0,624 = (37,5\ P)$ kg cm

Efortul unitar normal total va trebui să atingă valoarea limită - σ_a

$$\sigma_{max} = + \frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_a$$

$A = 12 \times 15 = 180\ cm^2$

$$W_z = \frac{12 \times 15^2}{6} = 450\ cm^3$$

$$W_y = \frac{15 \times 12^2}{6} = 360\ cm^3$$

$$\frac{P}{180} + \frac{47\ P}{450} + \frac{37,5\ P}{360} = 100\ kg/cm^2$$

$P_{max} = 468$ kg

Dacă consola ar fi mobilă (ar putea să se rotească în plan orizontal) forţa P_{max} se calculează punînd condiţia ca derivata efortului σ în raport cu un unghi variabil β să fie nulă.

$$\frac{d\sigma}{d\beta} = 0 = \left(\frac{P}{A} + \frac{M \sin\beta}{W_z} + \frac{M \cos\beta}{W_y}\right)'$$

$$\frac{60\ P.\cos\beta}{450} \quad \frac{60\ P.\ \sin\beta}{360} = 0$$

$$tg\ \beta = \frac{360}{450} = 0,8$$

$\beta = 38^0 40'$

$\sin\beta = 0,624$

$\cos\beta = 0,783$

In acest caz vom avea :

M_z (37,5 P) kg.cm şi $M_y = (47\ P)$ kg.cm

Valoarea maximă a forţei P va reeşi din relaţia :

$$\frac{P}{180} + \frac{47\ P}{360} + \frac{37,5\ P}{450} = 100\ kg/cm^2$$

$$P = \frac{100}{0,220} = 455\ kg.$$

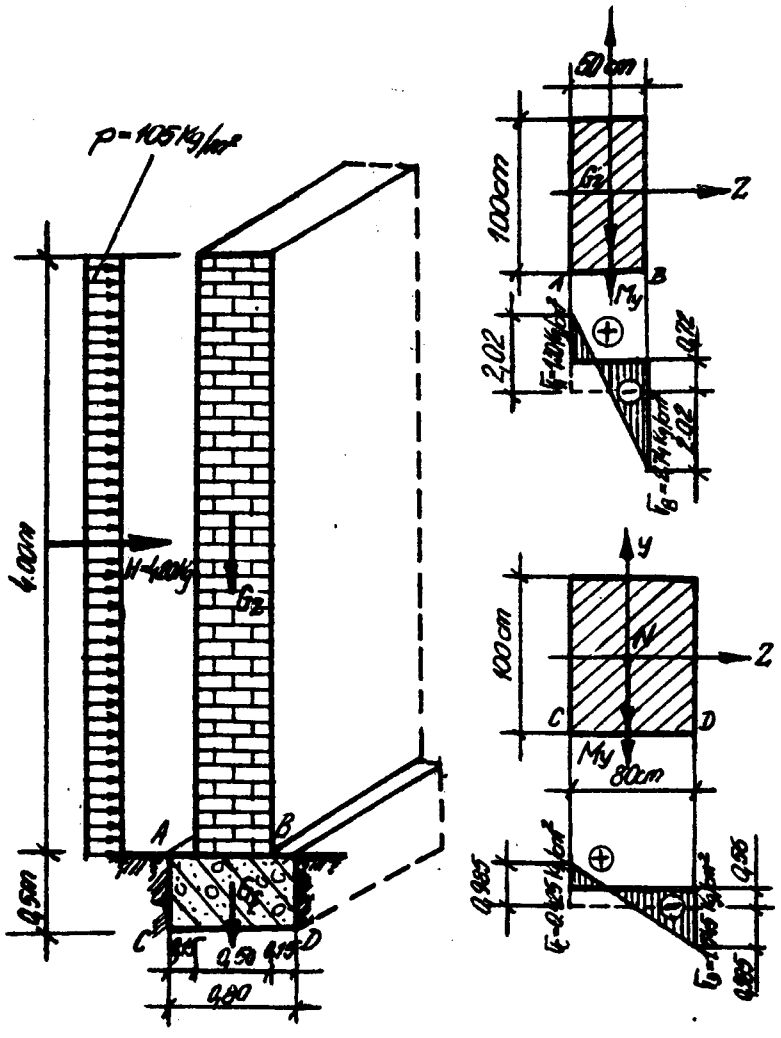


Fig. 346

8.13.- Se dă zidul din figură, supus la acţiunea vîntului p = 105 kg/m^2 şi a greutăţii proprii G_z - greutatea zidului din cărămidă şi G_f = greutatea fundaţiei din beton simplu.
Se cere: σ în A şi B precum şi repartiţia presiunilor pe teren.
Se dau:
γ_z = 1,8 T/m^3 şi
$\gamma_{b.s}$ = 2,2 T/m^2
Se va lua în calcul 1m din lung. zidului.
Trebuie să se determine la ce solicitări este supusă secţiunea AB.

$G_z = 0,5 \times 1 \times 4,0 \times 1,8 = 3,6$ T

$M_y = 0,105 \times 4,0 \times 2,0 \times 2,0 = 0,84$ Tm

$$\sigma_{A,B} = -\frac{G_z}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

$A = 50 \times 100 = 5000$ cm^2

$$W_y = \frac{100 \times 50^2}{6} = 41700 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{A,B} = -\frac{3600}{5000} \pm \frac{85000}{41700} = -0,72 \pm 2,02$$

$\sigma_A = +1,3$ kg/cm^2

$\sigma_B = -2,74$ kg/cm^2

Pentru a determina reparţiţia presiunilor pe teren trebuie să stabilim solicitările din secţiunea CD.

$$\sigma_{C,D} = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

$N = G_z + G_f = 3,6 + 0,88 = 4,84$ t = 4480 kg

$G_f = 0,8 \times 0,5 \times 1 \times 2,2 = 0,88$ T

$A = 80 \times 100 = 8.000$ cm^2; $M_y = 105 \times 4 \times 1 \times 1,25 =$
$= 1,05$ Tm $= 105.000$ kg.cm

$$W_y = \frac{100 \times 80^2}{6} = 107.000 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{C,D} = \frac{4480}{8000} + \frac{105000}{107000} = -0,56+0,985 = \begin{cases} \sigma_C = +0,425 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_D = -1,545 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Dar terenul de fundaţie nu poate prelua întinderi, deci presiunile reale pe teren sînt cele calculate anterior, se vor determina cu ajutorul secţiunii active.

Forţa N în realitate se aplică excentric la distanţa e:

$$e = \frac{M_y}{N} = \frac{105.000}{4.480} = 23,5 \text{ cm}$$

$c = 40 - 23,5 = 16,5$ cm

Zona activă pe care lucrează fundaţia este $3c = 3 \times 16,5 =$
$= 49,5$ cm

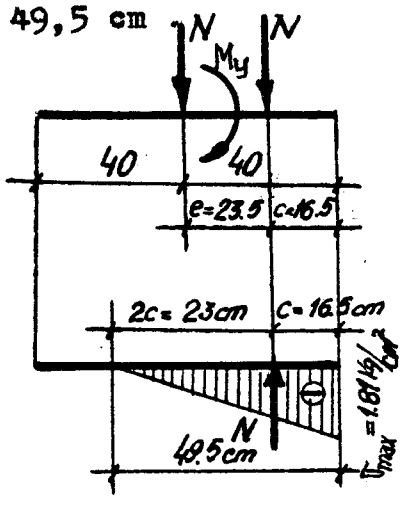


Fig.347

Iar presiunea maximă reală pe teren rezultă din relaţia :

$$\frac{\sigma_{max} \cdot 3c}{2} \cdot b = N$$

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3c.b} = \frac{2 \times 4480}{49,5 \times 100} = 1,81 \text{ kg/cm}^2$$

8.14.- Să se determine sîmburele central pentru contrafortul avînd secţiunea din figura 348.

Calculul sîmburelui central comportă următoarele etape :

a) Calculul centrului de greutate

$$y_0 = \frac{\frac{50 \times 150^2}{2} + \frac{100 \times 50^2}{2}}{50 \times 150 + 100 \times 50} = 55 \text{ cm}$$

$z_0 = 0$ (y_0 este axa de simetrie)

b) Calculul momentelor de inerţie şi a razelor giraţie în raport cu axele z_0 şi y_0

$$I_{z_0} = \frac{50 \times 150^3}{12} + 50 \times 150 \times 20^2 + \frac{100 \times 50^2}{12} + 100 \times 50 \times 55^2 =$$
$$= 22.640.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0} = \frac{50 \times 150^3}{12} + \frac{100 \times 50^3}{12} = 15.140.000 \text{ cm}^4$$

$A = 50 \times 150 + 100 \times 50 = 12.500\ cm^2$

$$i_{z_o}^2 = \frac{22.640.000}{12500} = 1815\ cm^2$$

$$i_{z_o}^2 = \frac{15.140.000}{12500} = 1210\ cm^2$$

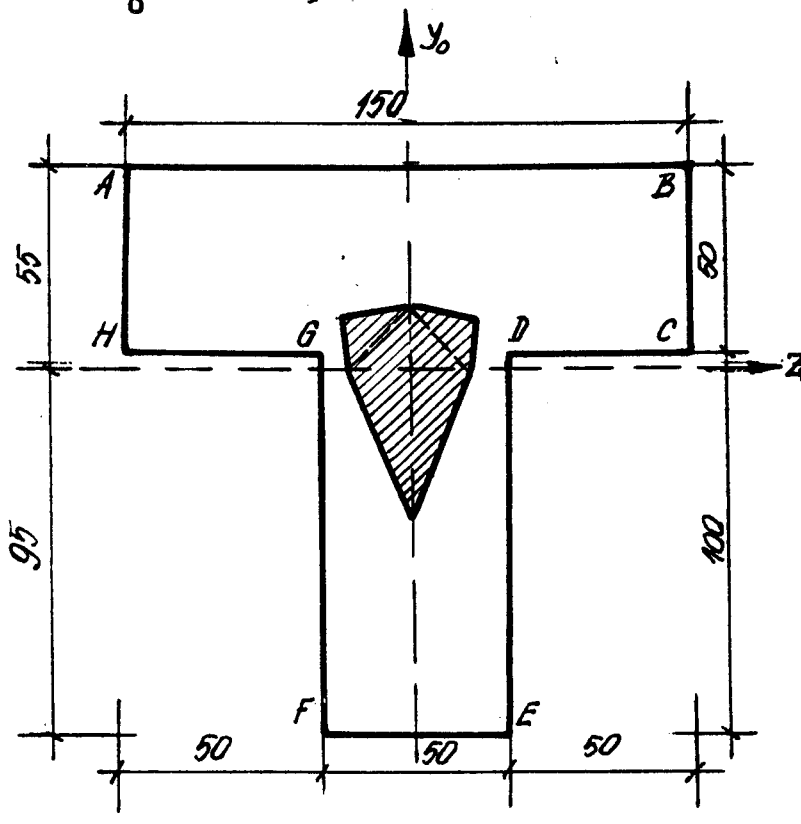


Fig. 348

c) Punem condiţii ca axa neutră să fie mereu tangentă la secţiune şi aplicînd relaţiile de mai jos vom putea calcula coordonatele punctului de aplicaţie al forţei :

$$z_o = -\frac{i_{y_o}^2}{z}$$

$$y_o = -\frac{i_{z_o}^2}{y}$$

unde z_o şi y_o sînt coordonatele punctului de aplicaţie al forţei iar y şi z sînt tăieturile axei neutre pe axele de coordonate.

- axa neutră trece prin A B

$z = \infty \quad z_o = 0$

$y = +55\ cm \qquad y_o = -\frac{1815}{55} = -35\ cm$

- axa neutră trece prin BC

$y = \infty \quad y_o = 0$

$z = +75\ cm \qquad z_o = -\frac{1210}{75} = -16,1\ cm$

- axa neutră trece prin CE - ecuaţia dreptei CE se poate scrie :

$$\frac{z-75}{25-75} = \frac{y-5}{-95-5} \qquad 2z - y - 145 = 0$$

pentru $y = 0 \qquad Z = +72,5\ cm$

pentru $z = 0 \qquad y = -145\ cm$

$$z_o = -\frac{1250}{72,5} = -16,7\ cm$$

$y_o = -\frac{1815}{-145} = +12,5$ cm

- axa neutră trece prin FR

$z = \infty \; z_o = 0$

$y = -95 \quad y_o = -\frac{1815}{-95} = +19,1$ cm

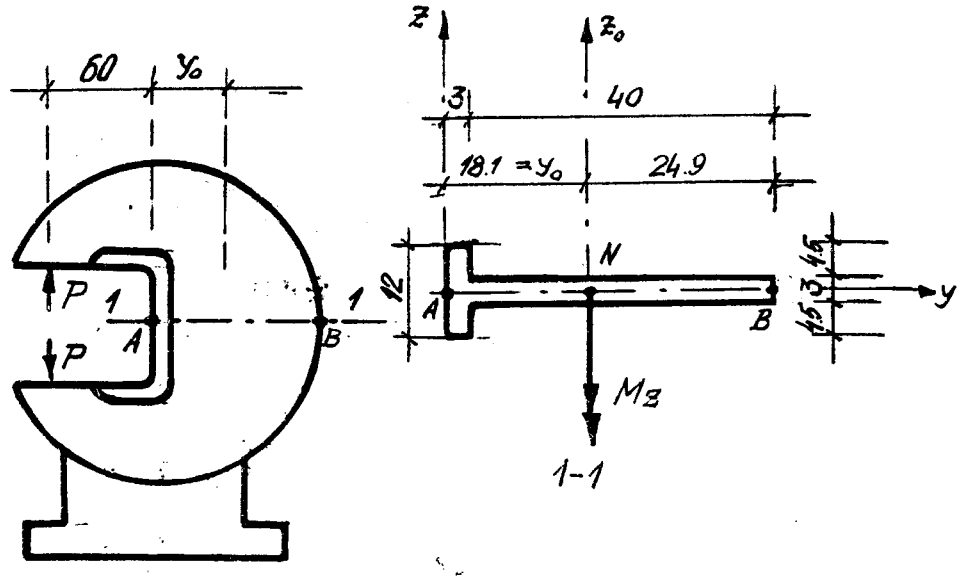


Fig. 349

8.15.- Să se verifice secţiunea cea mai solicitată (1-1) a batiului de fontă din figură solicitat la o forţă excentrică P = 4,5 t.

Deasemeni să se calculeze care este valoarea maximă a forţei P ştiind că pentru fontă admitem:

$\sigma_{a\,i} = +300$ kg/cm^2 (întindere)

$\sigma_{a\,c} = -600$ kg/cm^2 (compresiune)

Secţiunea 1-1 este supusă la întindere excentrică datorită solicitărilor N şi M_{y_o}, unde forţa axială este P iar momenturl încovoietor $M_{z_o} = P\,(60 + y_o)$

Centrul de greutate se determină cu expresia :

$$y_o = \frac{3 \times 40 \times 23 + 3 \times 12 \times 1,5}{40 \times 3 + 3 \times 12} = 18,1 \text{ cm}$$

Momentul de inerţie în raport cu axa z este :

$$I_{z_o} = \frac{3x40^3}{12} + 3x40x1,9^2 + \frac{12x3^3}{12} + 12x3x16,6^2 = 26.312 \text{ cm}^4$$

modulul de rezistenţă $W_{z_o} = \frac{I_{z_o}}{y_{max}} = \frac{26.312}{24,9} = 1050$ cm^3

iar aria A = 40 x 3 + 3 x 12 = 156 cm^2

Solicitările N = 4500 kg şi M_{z_o} = 4500 x 78,1 = 350.000 kg cm

Atunci $\sigma_A = + \frac{N}{A} + \frac{M_{z_o}}{I_{z_o}} y_A = \frac{4500}{156} + \frac{350000}{26312} \times 18,1 = 28,8+242 =$

$= 270,8 \ kg/cm^2 < 300 \ kg/cm^2$

iar $\sigma_B = \frac{N}{A} - \frac{M_{z_o}}{I_{z_o}} y_B = + \frac{N}{A} - \frac{M_{z_o}}{I_{z_o}} = \frac{4500}{156} - \frac{350000}{1050} = 28,8 - 333 =$

$= - 304,2 \ kg/cm^2 < - 600 \ kg/cm^2$

Valoarea forţei maxime P se va deduce din condiţiile ca rezistenţele admisibile la întindere şi la compresiune a fontei să nu fie depaşită.

In consecinţa punem condiţia ca $\sigma_A \leq \sigma_{at}$ iar $\sigma_B \leq \sigma_{ac}$ avînd ca necunoscută P.

Astfel avem :

$$\sigma_A = \frac{P'_{max}}{156} + \frac{P'_{max} \ 78,1}{26312} \times 18,1 \leq 300 \ kg/cm^2$$

De unde rezultă P'_{max} = 4980 kg

şi

$$\sigma_B = \frac{P''_{max}}{156} - \frac{P''_{max} \ 78,1}{1050} \leq - 600 \ kg/cm^2$$

de unde rezulta P''_{max} = 8800 kg

Deci forţa maximă P care se poate aplica pe batiu este de 4980 kg, astfel ca să nu fie depăşite nici rezistenţa admisibilă la întindere şi nici cea la compresiune a fontei.

8.16.- Se dă zidul de sprijin din beton simplu din figura 350. Se cere :

1.- Să se calculeze eforturile unitare normale din rostul A B.

2.- Să se verifice presiunile pe teren cunoscînd :

$\sigma_{at} = 3,70 \ kg/cm^2$

3.- Să se verifice stabilitatea la răsturnare şi la lunecare.

Se dă:

$\gamma_{teren} = 1,8 \ T/mc$

$\gamma_{beton \ simplu} = 2,2 \ T/mc$

Coeficientul de împingere activă $\lambda_a = 0,273$ (corespunzător unghiului de taluz natural $\varphi = 35^o$)

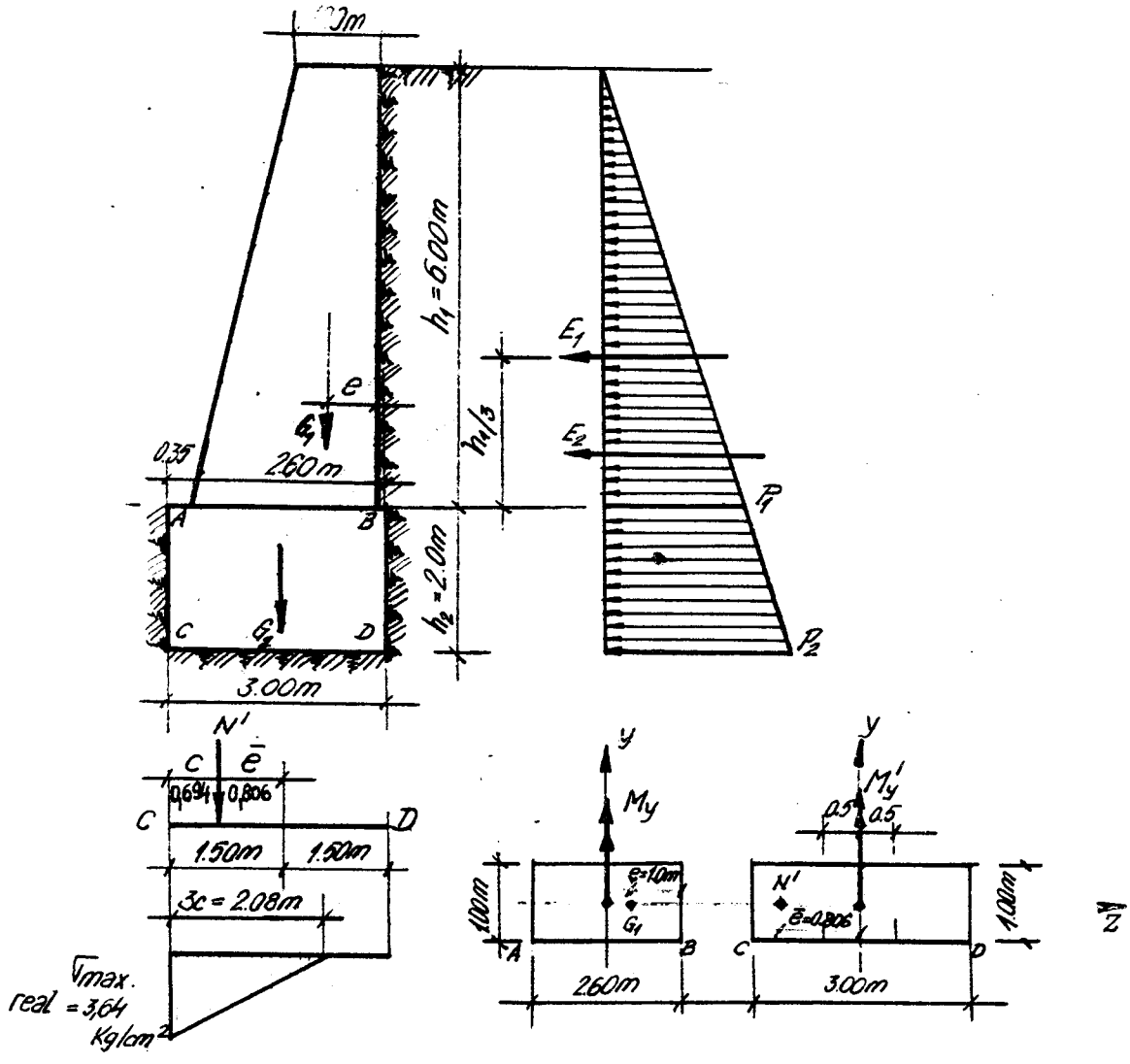


Fig. 350

Coeficientul de siguranţă la stabilitate $C_s = 1,5$, la lunecare $C_l = 1,3$ şi coeficientul de frecare dintre teren şi beton simplu $f = 0,7$.

Rezolvare :

1) Presiunea exercitată de pământ asupra zidului de sprijin este dată de expresia $p = \gamma h \lambda$

In secţiunea care trece prin AB acţionează o forţă verticală G_1 provenind din greutatea proprie şi o forţă orizontală E_1 provenind din împingerea pământului.

$$G_1 = \frac{2,60 + 1,20}{2} \times 6 \times 2,2 = 25 \text{ T}$$

Această forţă se aplică la distanţa e de la faţa verticală a zidului de sprijin.

$$e = \frac{1}{3} \cdot \frac{2,6^2 + 2,6 \times 1,2 + 1,2^2}{2,6 + 1,2} \simeq 1,00 \text{ m}$$

Presiunea pământului E_1 care se exercită asupra secţiunii AB se calculează astfel :

$P_1 = 1,8 \times 6,0 \times 0,272 = 2,94\ T/m^2$

$E_1 = \frac{2,94 \times 6}{2} \times 1 = 8,8\ t$ se aplică la o distanţă $\frac{h_1}{3} = 2\ m$ de la baza triunghiului.

In secţiunea AB acţionează [illegible] solicitări o forţă axială N a cărei valoare este G_1 şi un moment încovoietor M_y dat atît de E_1 cît şi G_1 (cu semne schimbate).

Presupunînd ca semnul pozitiv al momentului încovoietor M_y este dat de împingerea E_1 orientarea momentului M_y este cea indicată în figură, iar valoarea lui este :

$M_y = 8,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,00 - 25\ (1,5 - 1) = 10,10\ Tm$

Eforturile unitare normale în A şi B vor fi :

$$\sigma_{A,B} = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} = -\frac{25000}{25000} \pm \frac{1010000}{1.130.000}$$

$A = 260 \times 100 = 26000\ cm^2$

$W_y = \frac{1 \times 2,6^2}{6} = 1,13\ cm^3 = 1.130.000\ cm^3$

$\sigma_A = -1,86\ kg/cm^2$

$\sigma_B = -0,07\ kg/cm^2$

2) Pentru a putea verifica presiunile pe teren este nevoie să cunoaştem locul unde se aplică rezultanţa forţelor şi anume dacă rezultanta e în treimea mijlocie putem lucra cu relaţia obişnuită a compresiunii excentrice. $\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}$

In caz dacă rezultanta se aplică în afara sîmburelui central relaţia de mai sus nu se mai poate aplica întrucît terenul nu poate prelua întinderi. Vom aplica deci relaţia $\sigma_{max} = \frac{2N}{3bc}$ pentru a calcula presiunea maximă pe teren.

Asupra secţiunii CD acţionează o forţă $N' = G_1 + G_2$ şi un moment M'_y a cărui expresie este compusă din doi termeni - corespunzători lui E_2 şi G (G_2 nu dă moment).

$G_2 = 1 \times 3,0 \times 2,0 \times 2,2 = 13,2\ T$

$N' = G_1 + G_2 = 25 + 13,2 = 38,2\ T$

Pentru determinarea împingerii E_2 trebuie calculată P_2 presiunea la baza zidului de sprijin.

$P_2 = 0,272 \times 1,8 \times 8,0 = 3,92\ T/m^2$

$$E_2 = \frac{3,92 \times 8}{2} \times 1 = 15,70 \text{ t.}$$

$$M'_y = 15,7 \times \frac{8}{7} - 25,0 \times (1,5-0,05-1) = 30,75 \text{ Tm}$$

Rezultanta are o valoare N' fiind la o distanţă $\bar{e}$ de centrul de greutate al secţiunii CD

$$\bar{e} = \frac{M_Y}{38,2} = \frac{30,75}{38,2} = 0,806 \text{ m}$$

deci rezultanta nu se aplică în cadrul treimii mijlocii-(1,0 m)-deci 0,50 m în stînga şi 0,50 în dreapta axei y.

In acest caz

$c = 1,5 - 0,805 = 0,69$ Tm

Zona activă este :

$3\,c = 3 \times 0,694 = 2,08$ m

Iar $\text{max real} = \frac{2N}{3\,b\,c} = \frac{2 \times 38\,200}{208 \times 100} = 3,64 \text{ kg/cm}^2$ $3,7 \text{ kg/m}^2$

3.- Stabilitatea la răsturnare se verifică punînd condiţia ca raportul dintre momentul de stabilitate şi cel de răsturnare să fie mai mare decît coeficientul de siguranţă indicat de prescripţii în cazul nostru $c_s = 1,5$

$$\text{Deci } c = \frac{M_s}{M_r} \quad 1,5$$

Momentele de stabilitate şi de răsturnare se iau în raport cu punctul c (prin raport cu care se poate produce răsturnarea).

$M_s = 13,2 \times 1,5 + 25\,(3,0 - 1,05) = 69,80$ Tm

$M_r = 15,7 \frac{8}{3} = 42$ tm

$$c_s = \frac{69,80}{42,00} = 1,66 \quad 1,5$$

Stabilitatea la lunecare se verifică în mod asemănător şi anume raportul dintre forţele care se opun lunecării şi cele care contribuie la lunecare să fie mai mare decît coeficientul de siguranţă - la noi 1,3.

$$c = \frac{N_f}{E} \quad 1,3$$

$$c = \frac{38,20 \times 0,7}{15,7} = 1,70 \quad 1,3$$

8.17.- Se vor studia în două variante care este q_{max} cu care se poate încărca grinda precomprimată executată din claveuri de beton din figură, dacă cablul trece prin dreptul

axului barei (figura de mai jos) sau la treimea secţiunii, adică la limita sîmburelui central.

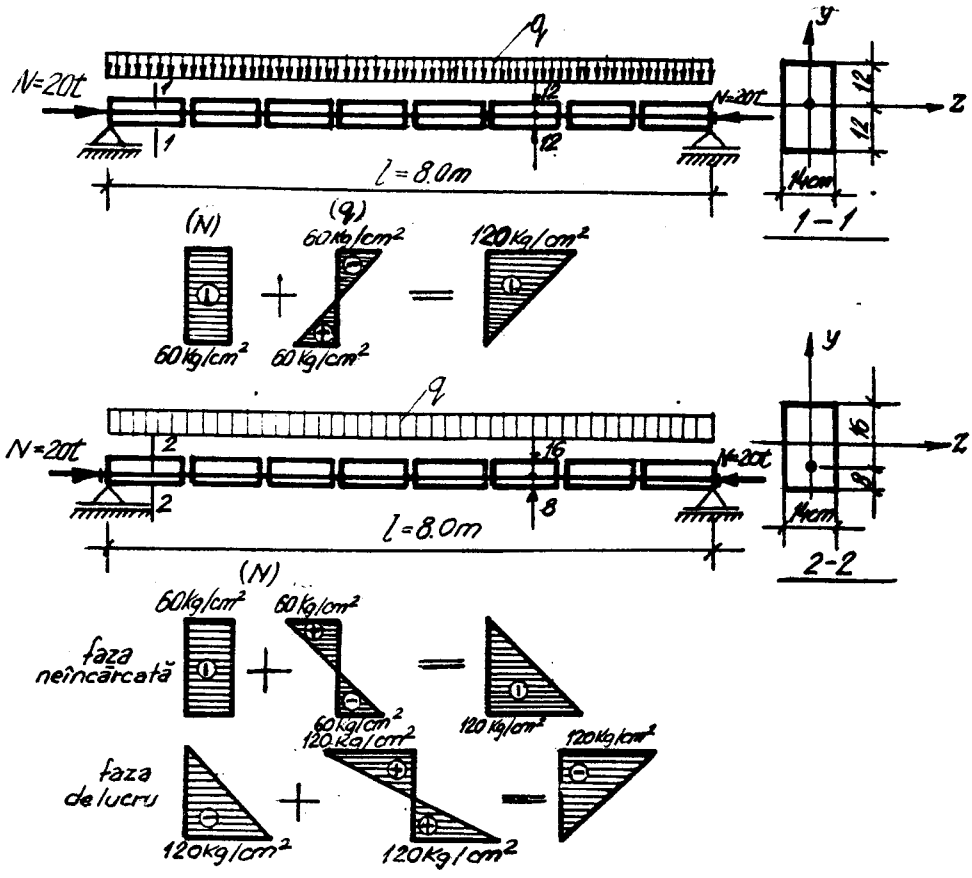


Fig. 351

Se dă : N = 20 T

rezistenţa la compresiune $\sigma_{ac} = 130$ kg/cm^2

rezistenţa la întindere $\sigma_{ai} = 0$

In primul caz, datorită forţei N ia naştere un efort unitar normal de compresiune :

$$\sigma = - \frac{20.000}{14 \times 24} = - 60 \text{ kg/cm}^2$$

Din încovoiere va trebui să rezulte un efort maxim de 60 kg/m^2 deoarece la partea inferioară a secţiunii σ trebuie să se depăşească în final $\sigma_{ai} = 0$

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M}{W_z} \leq \sigma_a = \pm 60 \text{ kg/cm}^2$$

unde : $M = \frac{q\, l^2}{8} = \frac{q\, 8^2}{8} = (8\, q)$ kgm

iar $W_z = \frac{14 \times 24^2}{6} = 1344$ cm^3

Inlocuind în expresia de mai sus găsim valoarea maximă a sarcinii unifor distribuite. q_{max}

$\frac{(8\,q)\cdot 100}{1344} = 60$ de unde $q = \frac{60 \times 1344}{8 \times 100} = 100$ kg/ml

In cazul variantei a doua datorită forţei N va rezulta următoarea distribuţie de eforturi unitare :

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

unde : $N = 20\ t = 20.000$ kg

$A = 14 \times 24 = 336\ cm^2$

$M_z = 20.000 \times 4 = 80.000$ kg cm

$W_z = \frac{14 \times 24^2}{6} = 1344\ cm^3$

Inlocuind aceste date în expresia de mai sus obţinem :

$$\sigma = -\frac{20000}{336} \pm \frac{80000}{1344} = -60 \pm 60 = \begin{cases} 0\ kg/m^2 \\ -120\ kg/m^2 \end{cases}$$

Deci în acest caz putem încărca grinda cu o sarcină uniform distribuită q_{max} astfel, încît să nu se depăşească la partea inferioară $\sigma = 120$ kg/cm^2 (vezi schema).

$$\sigma = +\frac{M}{W_z} = \frac{(8 \cdot q_{max}) \cdot 100}{1344} < 120\ kg/cm^2$$

De unde rezultă valoarea q_{max} :

$$q_{max} = \frac{1344 \times 120}{8 \times 100} = 200\ kg/ml$$

Apare deci raţională folosirea cablului în poziţia corespunzătoare variantei a doua deoarece sarcina admisibilă se poate dubla faţă de valoarea din prima variantă.

8.18.- Să se verifice presiunea maximă pe teren în cazul fundaţiei din figura 352.

Se dă poziţia rezultantei R ($z_0 = 80$ cm, $y_0 = 40$ cm), valoarea ei 50 t precum şi presiunea admisibilă pe teren

$$\sigma_{at} = 2{,}5\ kg/cm^2$$

Vom utiliza tabelul de la sfîrşitul capitolului VIII din care rezultă presiunea maximă pe teren cînd forţa prezintă excentricităţi în raport cu ambele axe de coordonate.

$$\sigma_{max} = \mu \frac{N}{F} \leqslant \sigma_{at}$$

unde: N este rezultanta sarcinilor care acţionează pe suprafaţa de fundare,

A este suprafaţa de contact a fundaţiei cu terenul

iar λ este un coeficient de multiplicare în funcție de raportul $\frac{y_0}{b}$ și $\frac{z_0}{h}$

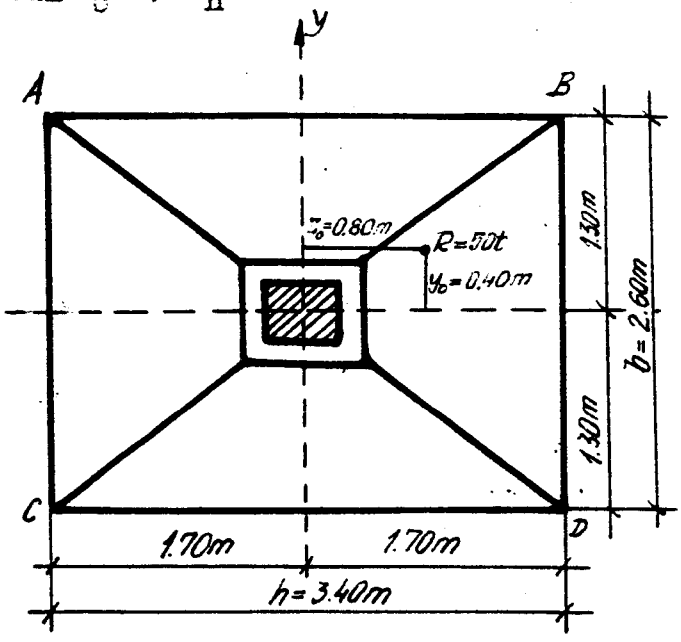


Fig. 352

In cazul nostru :

$N = R = 50 \text{ t} = 50.000 \text{ kg}$

$A = 3,40 \times 2,60 = 8,84 \text{ m}^2$

$= 88.400 \text{ cm}^2$

iar

$$\frac{y_0}{b} = \frac{0,40}{2,60} = 0,154$$

$$\frac{z_0}{h} = \frac{0,80}{3,40} = 0,235$$

Din tabel găsim prin interpolare :

$\lambda = 3,99$

$$\sigma_{max} = 3,99 \frac{50.000}{88.400} =$$

$= 2,28 \text{ kg/cm}^2 < 2,5 \text{ kg/cm}^2$

In cazul de față a fost nevoie să folosim tabelul deoarece rezultanta iese din zona sîmburelui central.

TABEL 8.1

0,50	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,48	33,3	35,4	37,5	29,8	42,3	44,9	47,8	50,9	54,3	58,1	62,3	66,9	72,1	78,1	85,2	93,8	104	117	134	156	188	234	313	469	938	∞
0,46	16,7	17,7	18,8	19,9	21,1	22,5	23,9	25,5	27,2	29,1	31,1	33,4	36,1	39,1	42,6	46,9	52,1	58,6	67,0	78,1	93,8	117	156	234	469	∞
0,44	11,1	11,8	12,5	13,3	14,1	15,0	15,9	17,0	18,1	19,4	20,8	22,3	24,0	26,0	28,4	31,3	34,7	39,1	44,6	52,1	62,5	78,1	104	156	313	∞
0,42	8,33	8,86	9,38	9,96	10,6	11,2	12,0	12,7	13,6	14,5	15,6	16,7	18,0	19,5	21,3	23,4	26,0	29,3	33,5	39,1	46,9	58,6	78,1	117	234	∞
0,40	6,67	7,08	7,51	7,96	8,46	8,99	9,56	10,2	10,9	11,6	12,5	13,4	14,4	15,6	17,0	18,8	20,8	23,4	26,8	31,3	37,5	46,9	62,5	93,8	188	∞
0,38	5,57	5,90	6,26	6,64	7,05	7,49	7,97	8,49	9,06	9,68	10,4	11,2	18,0	13,0	14,2	15,6	17,4	19,5	22,3	26,0	31,3	39,1	52,1	78,1	156	∞
0,36	4,76	5,05	5,36	5,69	6,04	6,42	6,83	7,27	7,76	8,34	8,90	9,55	10,3	11,2	12,2	13,4	14,9	16,7	19,1	22,3	26,8	33,5	44,6	67,0	134	∞
0,34	4,17	4,42	4,69	4,98	5,28	5,62	5,97	6,37	6,79	7,26	7,78	8,36	9,01	9,77	10,7	11,7	13,0	14,7	16,7	19,5	23,4	29,3	39,1	58,6	117	∞
0,32	3,70	3,95	4,17	4,43	4,70	4,99	5,31	5,66	6,04	6,46	6,92	7,45	8,01	8,68	9,47	10,4	11,6	13,0	14,9	17,4	20,8	26,0	34,7	52,1	104	∞
0,30	3,33	3,54	3,75	3,98	4,23	4,49	4,78	5,09	5,43	5,81	6,23	6,69	7,21	7,81	8,52	9,38	10,4	11,7	13,4	15,6	18,8	23,4	31,3	46,9	93,8	∞
0,28	3,03	3,22	3,41	3,62	3,84	4,08	4,35	4,63	4,94	5,28	5,66	6,08	6,56	7,10	7,75	8,52	9,47	10,7	12,2	14,2	17,0	21,3	28,4	42,6	85,2	∞
0,26	2,78	2,95	3,13	3,32	3,52	3,74	3,98	4,24	4,53	4,84	5,19	5,57	6,01	6,51	7,10	7,81	8,68	9,77	11,2	13,0	15,6	19,5	26,0	39,1	78,1	∞
0,24	2,56	2,72	2,89	3,06	3,25	3,46	3,68	3,92	4,18	4,47	4,79	5,15	5,55	6,01	6,56	7,21	8,01	9,01	10,3	12,0	14,4	18,0	24,0	36,1	72,1	∞
0,22	2,38	2,53	2,68	2,84	3,02	3,20	3,41	3,64	3,88	4,15	4,44	4,77	5,15	5,57	6,08	6,69	7,43	8,36	9,55	11,2	13,4	16,7	22,3	33,4	66,9	∞
0,20	2,22	2,36	2,50	[illegible]	2,82	2,99	3,18	3,39	3,62	3,86	4,14	4,44	4,79	5,19	5,66	6,23	6,92	7,78	8,90	10,4	12,5	15,6	20,8	31,1	62,3	∞
0,18	2,08	2,21	2,35	[illegible]	2,64	2,80	2,98	3,17	3,38	3,61	3,86	4,15	4,47	4,84	5,28	5,81	6,46	7,26	8,30	9,68	11,6	14,5	19,4	29,1	58,1	∞
0,16	1,96	2,08	2,21	[illegible]	2,48	2,65	2,80	2,97	3,17	3,38	3,62	3,88	4,18	4,53	4,94	5,43	6,04	6,79	7,76	9,06	10,9	13,6	18,1	27,2	54,3	∞
0,14	1,84	1,96	2,08	[illegible]	2,34	2,48	2,65	2,79	2,97	3,17	3,39	3,64	3,94	4,24	4,63	5,09	5,66	6,37	7,27	8,49	10,2	12,7	17,0	25,5	50,9	∞
0,12	1,72	1,84	1,96	[illegible]	2,21	2,34	2,48	2,63	2,80	2,98	3,18	3,41	3,68	3,98	4,35	4,78	5,31	5,97	6,83	7,97	9,56	12,0	15,9	23,9	47,8	∞
0,10	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,20	2,34	2,48	2,63	2,80	2,99	3,20	3,46	3,74	4,08	4,49	4,99	5,62	6,42	7,49	8,99	11,2	15,0	22,5	44,9	∞
0,08	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,34	2,48	2,64	2,82	3,02	3,25	3,52	3,84	4,23	4,70	5,28	6,04	7,05	8,46	10,6	14,1	21,1	42,3	∞
0,06	1,36	1,40	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,31	2,34	2,49	2,66	2,84	3,06	3,32	3,62	3,98	4,43	4,98	5,69	6,64	7,96	9,96	13,3	19,9	39,8	∞
0,04	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,35	2,50	2,68	2,88	3,13	3,41	3,75	4,17	4,69	5,36	6,26	7,51	9,38	12,5	18,8	37,5	∞
0,02	1,12	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,36	2,53	2,72	2,95	3,22	3,54	3,93	4,42	5,05	5,90	7,08	8,85	11,8	17,7	35,4	∞
0,00	1,00	1,12	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,22	2,38	2,56	2,78	3,03	3,33	3,70	4,17	4,76	5,56	6,67	8,33	11,1	16,7	33,3	∞
	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50

CAP. IX. FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

1. Flambajul unei bare, depinde de sarcina P care acţionează asupra ei şi anume, cînd:

$P < Pcr$ - bara este în echilibru stabil

$P > Pcr$ - bara este în echilibru nestabil

$P = Pcr$ - bara este în echilibru indiferent

Sarcina critică după Euler, se determină cu formula:

$$Pcr = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2}$$

unde l_f este lungimea de flambaj, distanţa dintre punctele de inflexiune ale barei deformate

$l_f = l$ - la bare dublu articulate

$l_f = \frac{l}{2}$ - la bare dublu incastrate

$l_f = 2l$ - la bare incastrate la un capăt şi libere la celălalt

$l_f \; o,7l$ - la bare încastrate la un capăt şi articulate la celălalt.

Dimensionarea unei bare supuse la falmbaj, după Euler, se face cu expresia:

$$I_{min} = \frac{Pcr\, l_f^2}{\pi^2 E}$$

Valabilitatea formulei lui Euler este redusă fiind aplicabilă numai în zona elastică pînă la limita de proporţionalitate.

2. Metoda de calcul cu ajutorul coeficientului de flambaj φ, reprezintă o succesiune de încercări de secţiuni, care în final trebuie să îndeplinească condiţia:

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} \leq \sigma_{ac}$$

Coeficientul de flambaj φ se găseşte în tabele, în funcţie de coeficientul de subţirime.

La secţiuni din lemn, se utilizează metoda coeficientului ζ şi anume din relaţia:

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}} = l_f \sqrt{\frac{k\sigma_{ac}}{N}}$$

se obţine valoarea terenului ζ, cunoscînd valoarea coeficientului de profil K pentru secţiunea respectivă.

Secţiunea	K
dreptunghiu h>b	$12\frac{h}{n}$
patrat	12
cerc	$4\pi=12,57$

Cu ajutorul tabelului alăturat se găseşte valoarea coeficientului de subţirime λ în funcţie de ξ ; cunoscînd se calculează φ şi apoi se verifică secţiunea cu formula

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} < \sigma_{ac}$$

λ	$\xi = \frac{\lambda}{\varphi}$
1o	1o,o4
2o	2o,33
3o	31,14
4o	42,83
5o	55,9o
6o	71,11
7o	89,77
8o	114,87
9o	145,42
1oo	179,6o

3. Principiul metodei energetice este de a se propune iniţial o anumită deformată (x) (deobicei o funcţiune trigonometrică), care trebuie să respecte condiţiile la reazeme şi să se apropie de deformata reală a barei.

Valoarea sarcinei critice rezultă:

$$P = \frac{\int EI\, y''^2\, dx}{\int y'^2\, dx}$$

a) In cazul legăturilor realizate prin plăcuţe şi zăbreluţe, ca pericolul de falmbaj să fie acelaş în raport cu axa Z şi Y, trebuie să existe relaţia $\lambda_Z = \lambda_{Yi}$ (în expresia λ_{Yi} intervine influenţa forţei tăietoare)

Pt. plăcuţe $\lambda_{Yi} = \sqrt{\lambda_Y^2 + \frac{n}{2}\lambda_1^2}$

Pt. zăbreluţe $\lambda_{Yi} = \sqrt{\lambda_Y^2 + 27\frac{A_{br}}{A_b}}$

unde

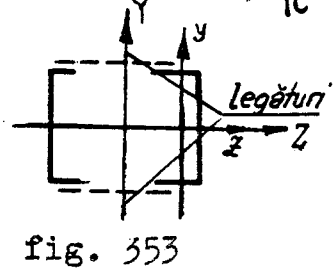


fig. 353

λ_Y - coeficientul de subţirime al secţiunii întregi în raport cu axa Y

n - numărul de elemente al secţiunii

λ_1 - coeficientul de subţirime al unui singur element (în raport cu axa minimă y); lungimea de flambaj se consideră distanţa dintre 2 plăcuţe.

Ab - aria secţiunii brute

Ad - aria celor două diagonale care se aleg după criterii constructive

Verificarea finală se face cu metoda coeficientului de flambaj φ atît în raport cu axa Z, cît şi cu axa Y

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi_z} \leqslant \sigma_{ac}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi_{Yi}} \leqslant \sigma_{ac}$$

b) La secţiuni compuse din lemn, în raport cu axa Z, flambajul nu diferă cu nimic faţă de cazul secţiunii pline, pe cînd în raport cu axa Y, care nu trece prin material, coeficientul λ respectiv momentul de inerţie de calcul I_c, depinde de legăturile celor 2 elemente şi anume:

$$I_c = \frac{3}{4} Io + \frac{1}{4} I$$

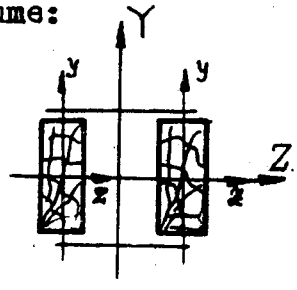


Fig. 354

unde:

I_c - este momentul de inerţie de calcul

Io - este momentul de inerţie al secţiunii care rezultă din alipirea secţiunilor componente

I - este momentul de inerţie al ansamblului pentru poziţiile reale ale secţiunii componente.

Se constată că momentul de inerţie real este mult mai mic decît cel teoretic, din cauză că legăturile sînt deformabile.

5. In cazul flambajului transversal, cînd asupra elementului de construcţie acţionează sarcini axiale şi transversale, c calculul se poate face cu metode aproximative şi cu metode cu caracter mai exact.

a) Ca metodă aproximativă des folosită în practica curentă, este metoda lui Jasinski:

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_b\varphi} + \frac{Mz}{Wz\ b} + \frac{My}{W\ yb} < \sigma_{ac}$$

.//.

unde:

φ este coeficientul minim de flambaj

Wzb şi Wyb sînd modulele de rezistenţă brută, corespunzătoare axelor z şi y

Ab este suprafaţa brută

P,Mz şi My sînt sarcina axială şi momentele încovoietoare în raport cu axa Z, respectiv axa Y.

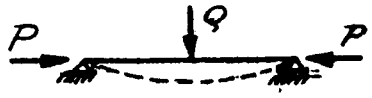


fig. 355

b) Metoda exactă, în cazul acţiunii simultane a unei sarcini axiale P şi a unei forţe transversale Q are ca principiu scrierea ecuaţiei deformatei rezultate din acţiunea ambelor forţe, integrarea ecuaţiilor diferenţiale şi determinarea apoi a constantelor, punînd condiţiile pe reazeme şi pe frontierele dintre diferitele zone de variaţie a momentului încovoietor.

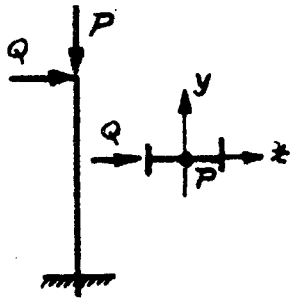


fig. 356

c) O metodă cu caracter exact dar care se poate aplica numai în zona elastică a materialului (valabilă în domeniul Euler) este următoarea:

1. Se calculează săgeata maximă fo din sarcina transversală P

2. Se determină săgeata f din relaţia $f = \frac{fo}{1 - \frac{P}{Pcr}}$

unde:

Pcr se calculează din formula lui Euler

3.- Se calculează momentul maxim încovoietor M_y, provenit din sarcini transversale (M_y^o), la care se adaugă efectul sarcinii axiale (Pf)

Deci $M_y^* = M_y^o + P\,f$

4.- Verificarea în raport cu axa Y se face cu relaţia :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A} + \frac{M_y^*}{W_y} < \sigma_{ac}$$

5.- In raport cu axa Z, verificarea la flambaj se face cu formula :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A \cdot \varphi_Z} < \sigma_{ac}$$

9.1.- Se dă stîlpul din figură avînd secţiunea dreptunghiulară 20 x 25 cm, din lemn încastrat la un capăt şi liber la

celălalt. Se cere să se determine care este valoarea maximă a forţei P ce se poate aplica pe stîlp.

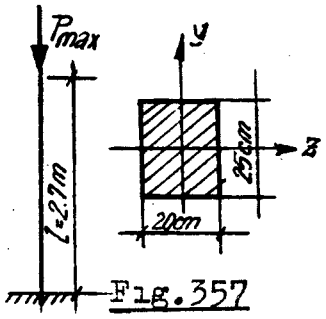


Fig.357

Din relaţia :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} \leq \sigma_{ac}$$

rezultă P_{max} şi anume :

$$P_{max} = A_{ef} \cdot \varphi \cdot \sigma_{ac}$$

$$A_{ef} = 20 \times 25 = 500 \text{ cm}^2$$

Pentru a calcula coeficientul de flambaj φ ne sînt necesare :

Raza de giraţie minimă:

$$i_{min} = i_y = 0,289 \times 20 = 5,78 \text{ m}$$

Lungimea de flambaj :

$$l_f = 21 \times 2 \times 2,70 = 5,40$$

Coeficientul de subţirime se va calcula cu relaţia:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{540}{5,78} = 93,5$$ Coeficientul de flambaj rezultă din tabel: $\varphi = 0,555$

Forţa de compresiune ce se poate aplica pe stîlp va fi:

$$P_{max} = 500 \times 0,355 \times 100 = 17.800 \text{ kg} = 17,8 \text{ T.}$$

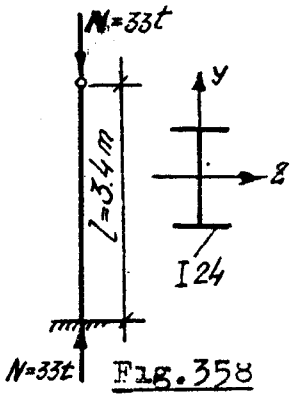


Fig.358

9.2.- Să se verifice la flambaj stîlpul metalic din figură, articulat sus şi încastrat la partea inferioară, avînd secţiunea compusă dintr-un profil I 24 şi supus la forţa axială N = 33 T. Folosim metoda coeficienţilor de flambaj φ.

Elementele geometrice ale secţiunii I 24 sînt :

Secţiunea A = 46,1 cm

Raza de giraţie : $i_z = 9,59$ cm

$i_y = 2,20$ cm

$i_{min} = i_y = 2,20$ cm

lungimea de flambaj l_f în cazul cînd elementul este articulat la un capăt şi încastrat la celălalt este 0,7 l

Deci $l_f = 0,7 \times 3,4 = 2,38$ -

Coeficientul de subţirime: $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{238}{2,20} = 109$

Coeficientul de flambaj φ corespunzător este: $\varphi = 0,519$

Efortul unitar efectiv va fi :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} = \frac{33000}{46,1 \times 0,519} = 1380 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{ac} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Se poate vedea că secţiunea I nu este recomandabilă întrucît elipsa centrală de inerţie foarte alungită avînd semiaxele mult diferite ca valoare - ceea ce aduce cu sine faptul că flambajul se va produce foarte uşor în raport cu axa y şi mult mai greu în raport cu axa z.

Deoarece direcţia după care flambează nu are importanţă - ne interesează doar direcţia cea mai periculoasă după care ar putea stîlpul să-şi piardă stabilitatea - nu ne va preocupa ce se întîmplă în raport cu alte direcţii. Vom căuta ca secţiunile supuse la flambaj să aibe ca elipsă de inerţie un cerc, sau o elipsă apropiată de un cerc.

9.3.- Se dă stîlpul metalic din figură, articulat la ambele capete şi avînd secţiunea inelară executat din ţeavă 140 x 5.

Să se verifice rezistenţa lui la flambaj, fiind supus la sarcina N = 18 t.

Se vede că secţiunea inelară lucrează optim la flambaj, materialul fiind împrăştiat, deci prezentînd acelaşi pericol de flambaj în raport cu toate direcţiile (elipsa de inerţie este un cerc).

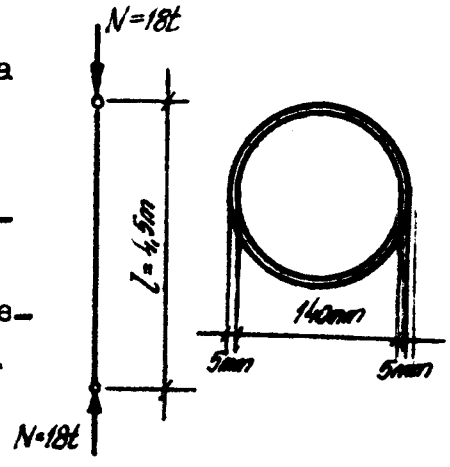


Fig.359

Vom verifica la flambaj cu formula :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{\varphi A}$$

Pentru a-l calcula pe φ avem nevoie de λ, pentru determinarea căruia este necesar să cunoaştem raza de giraţie minimă i_{min} şi respectiv I_{min} - momentul de inerţie minim.

In cazul nostru $I_{min} = I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$

unde: D este diametrul exterior al coroanei cercului
d este diametrul interior al coroanei cercului

Inlocuind în relaţie obţinem :

$$I = \frac{3,14}{64} (14^4 - 13^3) = 490 \text{ cm}^4$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (14^2 - 13^2) = 21,2 \text{ cm}^2$$

Raza de giraţie $i_{min} = i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{490}{21,2}} = 4,8$ cm

Coeficientul de svelteţe sau de subţirime este :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{450}{4,8} = 94$$

In cazul nostru $l_f = l = 450$ cm

Coeficientul de flambaj corespunzător extras din tabel este : $\varphi = 0,649$

Atunci,

$$\sigma_{ef} = \frac{18000}{0,649 \times 21,2} = 1310 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

9.4. Să se verifice la flambaj stîlpul din lemn avînd o secţiune dreptunghiulară (15x20) cm. Se va admite $\sigma_{ac} = 100$ kg/cm^2.

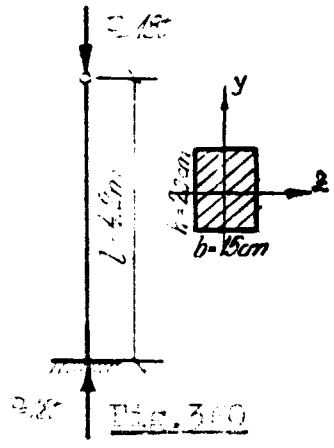


Fig.360

Verificarea unui stîlp la flambaj se face cu o expresie asemănătoare celei utilizate în cazul calculului la compresiune, deşi ca fenomen sînt total deosebite şi anume :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} \leq \sigma_{ac}$$

In cazul nostru lungimea de flambaj $l_f = 0,7 \times l = 0,7 \times 4,2 = 2,93$ m

Raza de giraţie minimă este cea corespunzătoare axei y - flambajul se produce în raport cu axa y - şi va fi egală ca valoare (pentru un dreptunghi) cu :

$$i_{min} = \frac{I_{min}}{A} = \sqrt{\frac{\frac{b\,b^3}{12}}{b\,h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{2,46} = 0,289\,b$$

In cazul nostru: $i_{min} = 0,289 \times 15 = 4,33$ cm

Coeficientul de subţirime este egal cu :

$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{293}{4,33} = 67,6$ iar coeficientul de flambaj corespunzător este: $\varphi = 0,634$

In concluzie deci verificarea se va face cu formula :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} = \frac{18000}{300 \times 0,634} = 94 \text{ kg/cm}^2 < 100 \text{ kg/cm}^2$$

Deci grinda rezistă în condiţii bune la flambaj.

9.5. Talpa superioară a unei grinzi cu zăbrele compusă din două profile I 20 distanţate cu 2 cm este supusă la o forţă de compresiune N = 65 T.

Să se verifice stabilitatea barei, considerînd-o articulată la ambele capete.

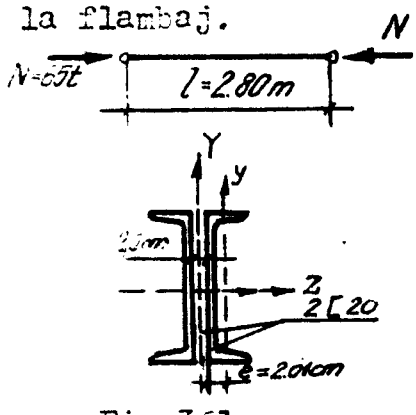


Fig.361

Vom verifica rezistenţa la flambaj pe direcţia axei principale de inerţie în raport cu care pericolul de flambaj e mai mare, (adică momentul de inerţie e minim).

In cazul nostru :

$I_Z = 2\ I_z = 2\ 1910 = 3820$ cm

$I_Y = 2\ (I_y + A\ d^2) = 2\left[142+32{,}2\ (2{,}01+1)^2\right] = 866\ cm^4$

$I_{min} = I_Y = 866\ cm^4$

Raza de giraţie minimă $i_{min} = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{866}{2x32{,}2}} = \sqrt{13{,}15} =$

$= 3{,}68$ cm

Coeficientul de subţirime λ şi coeficientul de flambaj φ vor fi :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{280}{3{,}68} = 76 \qquad \varphi = 0{,}743$$

Verificarea la flambaj se va face cu expresia :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A\varphi} < \sigma_{ac}$$

în cazul nostru :

$$\sigma_{ef} = \frac{65000}{2 \times 32{,}2 \times 0{,}743} = 1355\ kg/cm^2 < 1400\ kg/cm^2$$

9.6.- Să se dimensioneze la flambaj stîlpul din lemn din figură, avînd o secţiune dreptunghiulară.

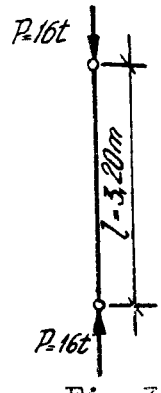


Fig.362

Rezolvarea o vom face în două variante.

1.- Vom dimensiona stîlpul la compresiune şi apoi, alegînd o secţiune efectivă mărită, o vom verifica la flambaj.

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{ac}} = \frac{16000}{100} = 160\ cm^2$$

Alegem o secţiune pătrată 15x15 cm avînd secţiunea efectivă: $A_{ef} = 15 \times 15 = 225\ cm^2$

Vom verifica acum secţiunea aleasă la flambaj, utilizînd expresia :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} < \sigma_{ac}$$

In cazul nostru $A = 225\ cm^2$. Pentru calculul coeficientului de flambaj φ trebuie să se determine raza de giraţie minimă i_{min} şi coeficientul de subţirime λ.

$$i_{min} = 0{,}289 \times b_{min} = 0{,}289 \times 15 = 4{,}34\ cm$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{320}{4{,}34} = 73{,}9$$ rezultă din tabel : $\varphi = ,56$

$\sigma_{ef} = \frac{16000}{225 \times 0,56} = 127$ kg/cm^2 > 100 kg/cm^2 deci stîlpul nu rezistă

Vom alege o secţiune mărită 15 x 20 cm

$A_{ef} = 300$ cm^2

$i_{min} = 0,289\ b_{min} = 0,289 \times 15 = 4,34$ cm

$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{320}{4,34} = 73,9$ rezultă : $\varphi = 0,56$

$\sigma_{ef} = \frac{16000}{300 \times 0,56} = 95,5$ kg/cm^2 < = 100 kg/cm^2

II.- Pentru a micşora numărul încercărilor, vom folosi metoda coeficientului de profil K.

Coeficientul de profil K pentru o secţiune pătrată este egal cu 12 (vezi tabel).

Calculînd apoi coeficientul ξ , în funcţie de coeficientul de profil K se vor determina coeficientul de subţirime λ şi coeficientul de flambaj φ :

$$\xi = l_f \sqrt{\frac{K \times \sigma_{ac}}{P}} = 380 \sqrt{\frac{12 \times 100}{16000}} = 88$$

Corespund: $\lambda = 69$ şi $\varphi = 0,619$

Secţiunea necesară va fi :

$A_{nec} = \frac{P}{A\varphi} = \frac{16000}{0,619 \times 100} = 258$ cm^2

Alegem o secţiune de 15 x 20 cm. $A_{ef} = 300$ cm^2

Verificăm apoi secţiunea aleasă la flambaj

$i_{min} = 0,289 \times 15 = 4,34$ cm

$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{320}{4,34} = 73,9$ rezultă : $\varphi = 0,56$

$\sigma_{ef} = \frac{16000}{300 \times 0,56} = 95,5$ kg/cm^2

Avantajul acestei metode constă în faptul că chiar la primadimensionare, (prima încercare) dimensiunile alese sînt foarte apropiate ca valoare de cele necesare, astfel că numărul încercărilor este redus la minimum.

9.7. Montantul central al unei grinzi cu zăbrele este executat din 2 L 70 x 70 x 7, poziţionate în cruce ca în figură.

Să se verifice montantul la flambaj, considerîndu-se articulat la capete (figura 363).

Intrucît direcţiile principale de inerţie ale sistemului ξ şi η (ξ şi η sînt axele pentru fiecare elemen în parte)

sînt axele de simetrie ale sistemului - va trebui să calculăm momentele de inerţie şi respectiv razele de giraţie în raport cu aceste axe, pentru că numai în raport cu aceste două axe s-ar putea produce flambajul (una dintre razele de giraţie este maximă alta minimă).

$I_\xi = 2\, I_\xi = 2 \times 67{,}1 = 134{,}2 \text{ cm}^4$

$I_\eta = 2\,(I_\eta + Ad^2) = 2(17{,}6+9{,}40 \times 3{,}49^2) = 263{,}2 \text{ cm}^4$

Momentul de inerţie minim este I_ξ, deci montantul va flamba în raport cu axa ξ.

Raza de inerţie minimă este:

$$i_{min} = i_\xi = \sqrt{\frac{2 \times 134{,}2}{2 \times 9{,}40}} = 2{,}67 \text{ cm}$$

Lungimea de flambaj l_f fiind egală cu 2,60 cm, coeficientul de subţirime λ va fi: $\lambda = \frac{260}{2{,}67} = 97{,}5$, iar coeficientul corespunzător de flambaj φ va fi (din tabele) - $\varphi = 0{,}628$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A\varphi} = \frac{16000}{2 \times 9{,}40 \times 0{,}628} = 1350 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru ca să nu flambeze fiecare element a secţiunii în parte, vor trebui aşezate legături(plăcuţe), la o astfel de distanţă, încît coeficientul de subţirime propriu al unui singur element să nu depăşească constructiv valoarea 50.

$$\text{Deci } \lambda_1 = 50 = \frac{l_{f1}}{i_{min}}$$

De unde reiese că distanţa dintre plăcuţe - legături, se obţine din relaţia :

$$l_{f_1} = \lambda_1 \, i_{min} = 50 \times 1{,}37 = 68{,}5 \text{ cm}$$

Ca observaţie: i_{min} în această relaţie s-a considerat i_η raza de giraţie minimă (a unui singur element).

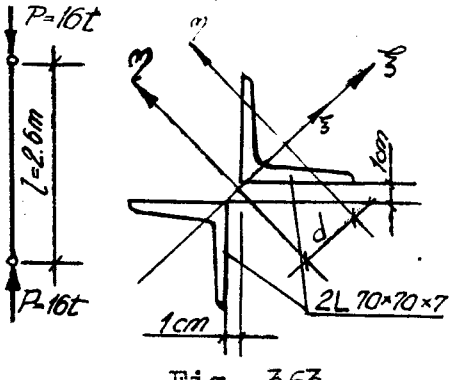


Fig. 363

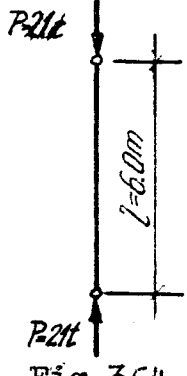


Fig.364

9.8.- Să se dimensioneze un stîlp de lemn dublu articulat, avînd o secţiune circulară, supus la o forţă P = 21 T. Se da $\sigma_{ac} = 100 \text{ kg/cm}^2$.

Dimensionarea consta dintr-o serie de încercări.

Vom da două variante de metode de dimensionare.

I.- Se dimensioneaza la compresiune simplă şi apoi ale-

gînd o secţiune mărita faţă de cea rezultata ca necesara la compresiune, se verifică la flambaj.

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{21000}{100} = 210 \text{ cm}^2$$

Alegem o secţiune circulara cu diametrul d = 18 cm, avînd secţiunea $A_{ef} = 254 \text{ cm}^2$

Raza de giraţie $i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = 4,5 \text{ cm}$

Lungimea de flambaj în cazul barelor duble articulate, este $l_f = l = 600$ cm

Coeficientul de subţirime: $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{600}{4,5} = 134$

Coeficientul de flambaj rezultă : $\varphi = 0,172$

Rezistenţa efectivă este :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}\varphi} = \frac{21000}{254 \times 0,172} = 520 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_a = 100 \text{ kg/cm}^2$$

Alegînd o secţiune circulară mult mărită, cu diametrul d = 24 cm şi secţiunea $A_{ef} = 452 \text{ cm}^2$.

Raza de giraţie $i = \frac{d}{4} = \frac{24}{4} = 6$ cm

Coeficientul de subţirime va fi: $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{600}{6} = 100$

iar coeficientul de flambaj corespunzător (din tabele) este : $\varphi = 0,310$.

Rezistenţa efectivă

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}\varphi} = \frac{21000}{452 \times 0,310} = 149 \text{ kg/cm}^2 > 100 \text{ kg/cm}^2$$

Alegem o secţiune circulară cu diametrul d = 28 cm, suprafaţa efectivă $A_{ef} = 616 \text{ cm}^2$, iar raza de giraţie :

$$i = \frac{d}{4} = \frac{28}{4} = 7 \text{ cm}$$

Coeficientul de subţirime şi coeficientul corespunzător de flambaj sînt:

$$\lambda = \frac{600}{7} = 86 \qquad \varphi = 0,419$$

Rezistenţa efectivă va fi :

$$\sigma_{ef} = \frac{21000}{0,419 \times 616} = 81,5 \text{ kg/cm}^2 < 100 \text{ kg/cm}^2$$

III.- Pentru a nu face atîtea încercări, se adoptă la construcţiile de lemn o metodă caracteristică, numită metoda

coeficientul de profil K (eficienţă mai ales la bare flexi-

Metoda coeficientului de profil K, constă în calculul unui coeficient ζ în funcţie de lungimea de flambaj a barei şi a unui coeficient de formă, găsindu-se apoi în funcţie de ζ, coeficientul de subţirime λ şi coeficientul de flambaj φ.

Coeficientul ζ se calculează cu formula :

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{\varphi}} = l_f \sqrt{\frac{K \sigma_{ac}}{N}}$$ In cazul nostru secţiunea fiind circulară, coeficientul de formă $K = 12,57$.

Atunci : $\zeta = 600 \sqrt{\frac{12,57 \times 100}{21000}} = 147$

Coeficientul de subţirime λ şi coeficientul de flambaj φ corespunzători, sînt: $\lambda = 91$ şi $\varphi = 0,374$.

Dimensionarea la flambaj se face după formula :

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a \times \varphi} = \frac{21000}{0,374 \times 100} = 560 \text{ cm}^2$$

Alegem secţiunea circulară cu d = 28 cm $A_{ef} = 616 \text{ cm}^2$

Raza de giraţie: $i = \frac{d}{4} = \frac{28}{4} = 7$ cm. Coeficientul de subţirime se determină în mod obişnuit :

$\lambda = \frac{600}{7} = 86$ iar coeficientul de flambaj respectiv este $\varphi = 0,419$

Verificarea se face cu expresia :

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A \varphi} = \frac{21000}{0,419 \times 616} = 81,5 \text{ kg/cm}^2 < 100 \text{ kg/cm}^2$$

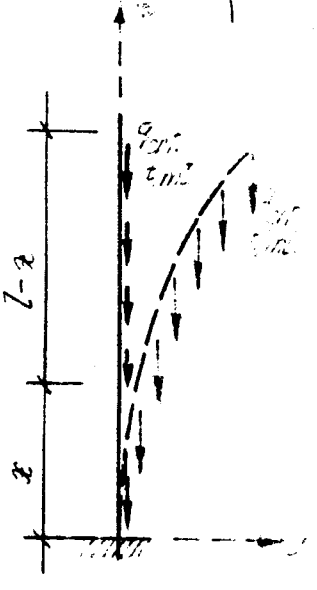


Fig.365

9.9. Se dă un stîlp încastrat la un capăt şi liber la celălat supus la greutatea proprie. Să se calculeze sarcina critică cu metoda energetică.

Alegînd ca axa a deformatei o sinusoidă cu ecuaţia: $y = a \sin \frac{\pi x}{2l}$ şi egalînd expresiile potenţiale de deformaţii U_i cu energie de poziţie a sarcinilor exterioare U_e, obţinem relaţia :

$$\frac{EI}{2} \int (Y'')^2 dx = \int_0^l q_{cr} (l-x) \frac{1}{2} (y')^2 dx$$

$$y' = \frac{a\pi}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l}$$

$$y'' = \frac{a\pi}{4l^2} \sin \frac{\pi x}{2l}$$

Inlocuindu-le în expresia de mai sus :

$$\frac{EI}{2}\frac{a^2\pi^4}{16\,l^4}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{2l}\,dx = \frac{q_{cr}}{2}\,\frac{a^2\pi^2}{4\,l^2}\int_0^l \cos^2\frac{\pi x}{2l}(l-x)\,dx$$

Calculăm integrala din partea stîngă :

$$\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{2l}\,dx = \int_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{2l}\right)dx = \frac{l}{2}$$

iar integrala din partea dreaptă o descompunem în :

$$\int_0^l (l-x)\cos^2\frac{\pi x}{2l}dx = \int_0^l l\cos^2\frac{\pi x}{2l}dx - \int_0^l x\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx$$

care calculate dau :

$$\int_0^l l\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx = \frac{l}{2}\int_0^l\left(1+\cos\frac{\pi x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{2}$$

$$\int_0^l x\cos^2\frac{x}{2l}dx = \int_0^l \frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{\pi x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^l x\cos\frac{\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{l^2}{4} + \frac{l}{2}\left[\frac{x\,l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{l}{\pi}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}dx\right] = \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{\pi^2}$$

Introduse în formula inițială rezultă :

$$\frac{EI}{2}\frac{a^2\pi^4}{16\,l^4}\cdot\frac{l}{2} = \frac{q_{cr}}{2}\,\frac{a^2\pi^2}{4\,l^2}\left[\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{4}-\frac{l^2}{\pi^2}\right]$$

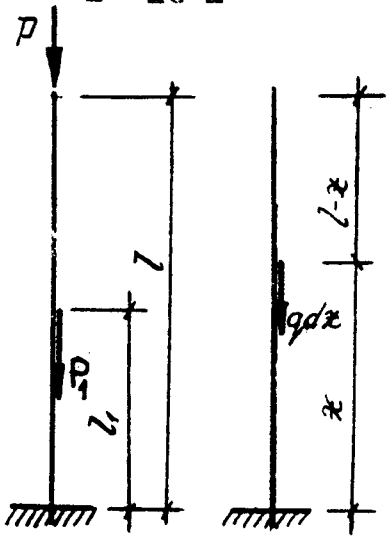


Fig.366

Simplificînd și reducînd, relația devine :

$$\frac{EI\pi^2}{8\,l^3} = q_{cr}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right]$$

Sarcina critică $(q_{cr}l)$ va fi :

$$(q_{cr}l) = \frac{\pi^2\,EI}{8\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right)l^2} = \frac{EI}{1{,}189\,l^2} = \frac{8{,}29\,EI}{l^2}$$

Din tablourile funcțiunii **Bessel**, sarcina critică reiese egală cu valoarea :

$$(q_{cr}l) = \frac{7{,}83\,EI}{l^2}$$

După metoda lui Korabov orice sarcină P_1 pe parcursul stîlpului se poate înlocui cu o forță P aplicată în vîrful stîlpului egală cu valoarea $P = P_1\left(\frac{l_1}{l}\right)^2$ în cazul nostru se poate aplica scriind că toate sarcinile $q\,dx$ însumate pe înălțimea stîlpului se pot înlocui cu o forță concentrată P_{cr}:

$$P_{cr} = \int_0^l q_{cr}dx\left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{q_{cr}}{l^2}\int_0^l x^2dx = \frac{q_{cr}}{l^2}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \frac{q_{cr}\,l^3}{3\,l^2} = \frac{q_{cr}}{3}$$

Deci forța cu care se poate înlocui sarcina distribuită

este o treime din sarcina totală de pe parcursul stîlpului.

Iar sarcina critică (q_{cr} l) va fi :

$$(q_{cr}l) = 3\,P_{cr} = 3\,\frac{\pi^2 EI}{4\,l^2} = \frac{7{,}4\,EI}{l^2}$$

Se vede că ambele metode dau erori de circa 6% faţă de soluţia exactă dată de funcţiunile Bassel.

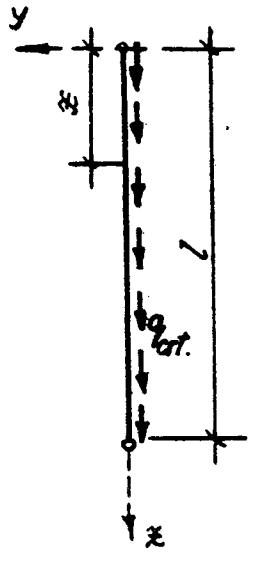


Fig.367

9.10.- Se dă stîlpul dublu articulat din figură supus la greutatea proprie q. Să se determine valoarea critică a sarcinii q_{cr} cu metoda energetică.

Egalînd expresia energiei de poziţie a sarcinilor exterioare U_e cu energia potenţială de deformaţie U_i (bara se află în echilibru indiferent cînd sarcina atinge valoarea critică) obţinem :

$$P_{cr}\,(y')^2 dx = Ei \quad (y'')^2\,dx$$

Presupunem că deformata este o sinusoidă avînd expresia :

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}$$

Ea satisface condiţiile de contur, adică pentru $x = 0$ şi $x = l$ $y = 0$ şi $y'' = 0$.

$$y' = a\,\frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$y'' = -\,a\,\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Sarcina critică într-o secţiune x, este $q_{cr}.x$

In cazul nostru :

$$\int_0^l q_{cr} x\, a^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}\,dx = EI \int_0^l a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l}\,dx$$

Expresia de mai sus se mai poate scrie şi astfel:

$$q_{cr} = \frac{a^2\pi^2}{l^2} \int_0^l x \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = EI\,\frac{a^2\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l}\,dx$$

Integralele se rezolvă astfel :

$$\int_0^l x \cos^2 \frac{\pi x}{l} = \int_0^l \frac{x\left(1+\cos \frac{2\pi x}{l}\right)}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^l + \left|\frac{1}{2\pi} x \sin \frac{2\pi x}{l}\right|_0^l - \left|\frac{l^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi x}{l}\right|_0^l\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1 - \cos \frac{2\pi x}{l}) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right]_0^l = \frac{l}{2}$$

Înlocuindu-le în expresia de mai sus capătăm :

$$\frac{q_{cr}\, a^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{2} = EI \frac{a^2 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$q_{cr} = 2\frac{EI\pi^2}{l^3} \text{ sau } (q_{cr} l) = 2\frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ . sau } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \left(\frac{q_{cr} l}{2}\right)$$

ceea ce demonstrează că o sarcină uniformă q_{cr} distribuită de-a lungul stîlpului, poate ri înlocuită la flambaj cu o sarcină concentrată, avînd ca valoare jumătate din forţa uniform distribuită.

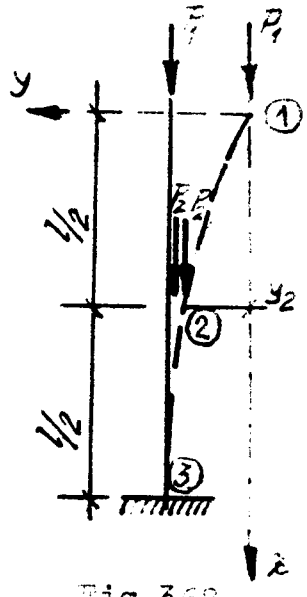


Fig.368

9.11.- Să se determine parametrul critic pentru pierderea de stabilitate a consolei din figura alăturată, acţionată de sarcinile $P_1 = P$ şi $P_2 = \beta P$, utilizînd metoda energetică. ($\beta = \frac{P_2}{P_1}$ este o constantă)

Se alege ca formă deformată de pierdere a stabilităţii o sinusoidă. Ecuaţia acesteia, în sistemul de axe ales :

$$y = f \sin \frac{\pi}{2l} x$$

asigură îndeplinirea condiţiilor la limită pentru deformata aleasă atît în deplasări cît şi în eforturi:

$x = 0 \quad y = 0 \quad M = -EIy'' = 0$

$x = l \quad y = f \quad y'' = 0$

Pentru valoarea critică a parametrului (sarcina P) poziţia deformată a barei este o poziţie de echilibru indiferent pentru care este îndeplinită relaţia :

$$U_i = U_e = o$$

unde : U_i - este energia potenţială de deformaţie a barei şi

U_e - este energia de poziţie a sarcinilor exterioare :

Exprimînd pentru U_i expresia în funcţie de momentul încovoietor :

$$U_i = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{EI}$$

ţinînd seama că $M = M_1 = P_y$ pe intervalul 1-2 şi $M = M_2 = -P_y + P(y - y_2)$ pe intervalul 2-3 (unde $y_2 = f \sin \frac{\pi}{2l} \cdot l =$

$= f \sin \frac{\pi}{4} = f \frac{\sqrt{2}}{2}$)

se obţine :

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^{l/2} M_1^2 \frac{dx}{EI} + \int_{l/2}^{l} M_2^2 \frac{dx}{EI} =$$

$$= \frac{1}{2EI}\left\{\int_0^{l/2} P^2 y^2 dx + \int_{l/2}^{l}\left[(1+\beta)P y - \beta P y_2\right]^2 dx\right\} = \frac{1}{2EI}\left[P^2\int_0^{l/2} y^2 dx + \right.$$

$$\left. + P^2(1+\beta)^2\int_{l/2}^{l} y^2 dx - 2P^2\beta(1+\beta)y_2\int_{l/2}^{l} y\,dx + \beta^2 P^2 y_2^2\int_{l/2}^{l} dx\right]$$

Rezolvînd integralele şi apoi introducînd în expresia de mai sus :

$$\int_0^{l/2} y^2 dx = f^2\int_0^{l/2}\sin^2\frac{\pi}{2l}x\,dx = \frac{f^2}{2}\left(x - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\Big|_0^{l/2} = \frac{f^2 l}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$$

$$\int_{l/2}^{l} y\,dx = f\int_{l/2}^{l}\sin\frac{\pi}{2l}x\,dx = -f\frac{2l}{\pi}\cos\frac{\pi}{2l}x\Big|_{l/2}^{l} = f\cdot\frac{2l}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{fl}{\pi}\sqrt{2}$$

$$U_i = \frac{P^2 f^2 l}{4EI}\left[1 + \beta\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \beta^2\left(1 - \frac{3}{\pi}\right)\right]$$

Energia de poziţie a sarcinilor exterioare, care este egală cu lucrul mecanic al forţelor exterioare cînd se aduce sistemul din poziţia deformată în poziţia iniţială, se determină cu expresia :

$$U_e = -\sum P_i u_i = -(P_1 u_1 + P_2 u_2) = -P(u_1 + \beta u_2)$$

unde u_1, u_2 reprezinta deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor, după direcţia forţelor respective pe forma deformată aleasă.

Folosind expresia deplasării capetelor unei bare prin încovoiere :

$$u = \frac{1}{2}\int (y')^2 dx$$

şi ţinînd seama de expresia deformatei rezultă :

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^{l}(y')^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{l}\left(\frac{\pi}{2l} f \cos\frac{\pi}{2l}x\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{8l^2} f^2\int_0^{l/2}\cos^2\frac{\pi}{2l}dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{16}\frac{f^2}{l}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int_{l/2}^{l}(y')^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{16 l^2}\left(x + \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\Big|_{l/2}^{l} = \frac{\pi^2 f^2}{16 l}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$$

Atunci expresia energiei de poziţie devine :

$$U_e = -P\frac{\pi^2 f^2}{16 l}\left[1 + \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\right]$$

Egalînd energia de poziţie a sarcinilor exterioare cu energia potenţială a barei rezulta :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(2 l)^2} \cdot \frac{1 + \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)}{1 + \beta\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \beta^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}$$

Observații: 1. Primul termen $\frac{\pi^2 E I}{(2 l)^2}$ reprezintă sarcina critică Euler (P_{cr}), pentru consola cu sarcina numai la vîrf ($P_2 = 0$ adică $\beta = 0$).

2.- Cînd $P_1 = 0$ și $P_2 \neq 0$, se înmulțește relația de mai sus cu β și ținînd seama că $\beta \to \infty$ și $\beta P = P_2$, rămîne :

$$P_{2cr} = \frac{\pi^2 E I}{(2 l)^2} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{2}{\pi}} = 4{,}14 \frac{\pi^2 E I}{(2 l)^2}$$

adică o forță critică de 4,14 ori mai mare decît în cazul cînd sarcina s-ar fi aplicat în vîrf.

Dacă se consideră ca lungimea barei distanța de la punctul de aplicație a lui P_2 la încastrare, adică $\frac{l}{2}$, se obține:

$$P_{2cr} = \frac{4{,}14}{4} \frac{\pi^2 E I}{(2 \cdot \frac{l}{2})^2} = 1{,}032 \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

Termenul 1,032 scoate în evidență aportul părții neîncărcate a barei, care evident este foarte mic.

9.12.- Se dă stîlpul cu secțiunea variabilă în trepte din figură. Se cere să se calculeze sarcina critică P_{cr}.

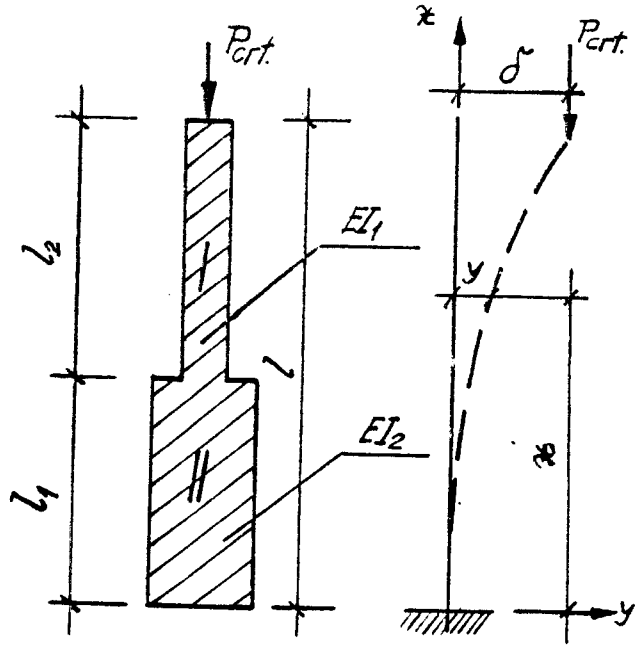


Fig. 369

Particularizare

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$$

$$I_2 = 4 I_1$$

Ecuațiile diferențiale ale încovoierii pentru fiecare porțiune se pot scrie :

$$EI_1 y_1'' = P\delta - P y_1$$

$$EI_2 y'' = P\delta - P y_2$$

sau :

$$EI_1 y_1'' + P y_1 = P\delta$$

$$EI_2 y_2'' + P y_2 = P\delta$$

Soluțiile acestor ecuații diferențiale sînt :

$$y_1 = A_1 \sin n_1 x + A_2 \cos n_1 x + \delta$$

$$y_2 = B_1 \sin n_2 x + B_2 \cos n_2 x + \delta$$

în care :

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}}$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}$$

Constantele se determină punînd condiţii la limită :

pt. $x_2 = 0$ $\quad y'2 = 0$

pt. $x_1 = l$ $\quad y_1 = \delta$

pt. $x_1 = x_2 = l_2$ $\quad y_1'(l_2) = y_2'(l_2)$ şi $y_1(l_2) = y_2(l_2)$

Se obţine următoarele 4 ecuaţii :

$$B_1 = 0$$

$$A_1 \sin n_1 l + A_2 \cos n_1 l = 0$$

$$A_1 n_1 \cos n_1 l_2 - A_2 n_1 \sin n_1 l_2 + B_2 n_2 \sin n_2 l_2 = 0$$

$$A_1 \sin n_2 l_2 + A_2 \cos n_1 l_2 - B_2 \cos n_2 l_2 = 0$$

iar ecuaţia caracteristică devine :

$$D = \begin{vmatrix} \sin n_1 l_1 & \cos n_1 l & 0 \\ \cos n_1 l_2 & -\sin n_1 l_2 & \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 \\ \sin n_1 l_2 & \cos n_1 l_2 & -\cos n_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvînd determinentul vom găsi :

$$\operatorname{tg} n_1 l_1 \operatorname{tg} n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2}$$

Această ecuaţie se poate rezolva cunoscînd relaţiile dintre I_1 şi I_2 şi dintre l_1 şi l_2

In cazul nostru $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ şi $I_2 = 4 I_1$, adică :

$\frac{I_2}{I_1} = 1$ şi $\frac{E I_1}{E I_2} = \frac{I}{4}$ obţinem valorile n_1 şi n_2 :

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}} = 2 n_2 \qquad n_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}$$

$\operatorname{tg} 2n_2 l_1 \operatorname{tg} n_2 l_1 = 2$ Notînd $n_2 l_1 = z$, putem scrie :

$\operatorname{tg} 2z \operatorname{tg} z = 2$ dar $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$

$$\frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z} \operatorname{tg} z = 2$$

$$2 \operatorname{tg}^2 z - 2 + 2 \operatorname{tg}^2 z = 0$$

$$tg^2 z = \frac{1}{2}$$

$tg\ z = 0,707$ prin urmare $z = n_2 l_1 = 0,615$

$$(n_2 l_1)^2 = (0,615)^2 = \frac{P_{cr}}{E I_2} \cdot l_1^2 = 0,38 \quad \text{sau} \quad P_{cr} = \frac{0,38\ E I_2}{(\frac{l}{2})^2}$$

sau

$$P_{cr} = \frac{1,52\ E\ I_2}{l^2} = \frac{6,08\ E\ I_1}{l^2}$$

Dacă stîlpul ar avea o secţiune constantă cu rigiditatea EI_1 sarcina critică ar fi :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\ E\ I_1}{(2\ l)^2} = \frac{2,45\ E\ I_1}{l^2}$$

presupunînd că $I_2 = 4\ I$, obţinem :

$$P_{cr} = \frac{2,45\ E\ I_2}{l^2} = \frac{9,80\ E\ I_1}{l^2}$$

In concluzie, în cazul nostru sarcina critică are o valoare intermediară, medie, faţă de cele ce vor rezulta în cazul cînd stîlpul ar avea secţiunea constantă cu momentul de inerţie I, şi cu momentul de inerţie I_2.

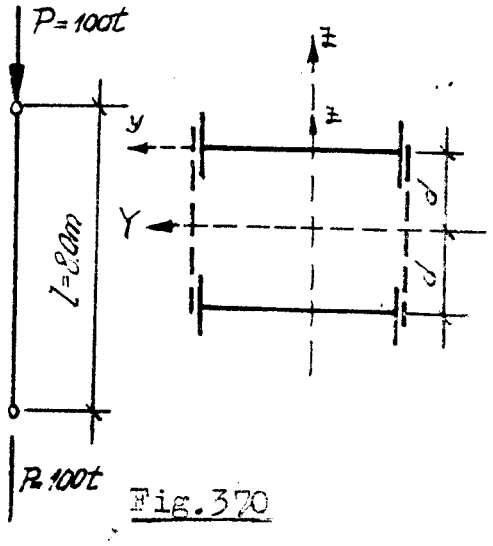


Fig.370

9.13.- Se dă stîlpul din figură, dublu articulat şi avînd o secţiune compusă din 2 profile I, solidarizate cu zăbreluţe sudate.

Se cere :

1.- Să se dimensioneze secţiunea stîlpului din două profile I.

2.- Să se alcătuiască secţiunea, solidarizarea făcîndu-se cu zăbrele sucate.

3.- Să se dimensioneze şi să se verifice zăbreluţele şi prinderea lor cu sudură.

1.- Pentru dimensionarea secţiunii stîlpului vom alege astfel secţiunea încît să nu flambeze în raport cu axa Z' (axa care trece prin material).

Vom porni cu dimensionarea la compresiune simplă şi vom verifica dacă secţiunea este suficientă şi în cazul cînd se ţine seama de acţiunea flambajului

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{100.000}{1.400} = 71,4\ cm^2$$

Se adopta $A_{ef} > A_{nec}$ şi anume în cazul nostru 2 I 28

$A_{ef} = 2 \times 61,1 = 122,2 \text{ cm}^2$ şi $i_z = 11,1$ cm

Atunci :

$$\lambda_z = \frac{800}{11,1} = 72 \qquad \varphi_z = 0,761$$

şi

$$\sigma_{ef} = \frac{100.000}{0,761 \times 122,2} = 1080 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Intrucît secţiunea este prea neeconomică, vom încerca cu două profile I 26 : $A = 2 \times 53,4 = 106,8 \text{ cm}^2$

şi $i_z = 10,4$ cm

In acest caz vom avea :

$$\lambda_z = \frac{800}{10,4} = 77 \qquad \varphi_z = 0,738$$

$$\sigma_{ef} = \frac{100.000}{106,8 \times 0,738} = 1270 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Făcînd încercarea cu două profile I 24, va rezulta că nu rezistă.

2). Pentru alcătuirea secţiunii trebuie să cunoaştem atît profilele cît şi distanţa 2 a dintre ele.

Distanţa dintre profile se determină punînd condiţia ca pericolul de flambaj în raport cu axele $Y - Y$ şi $Z - Z$ să fie acelaş.

Pericolul de flambaj în raport cu axa $Z - Z$ se exprimă pri prin coeficientul de subţirime λ_z, iar cel în raport cu axa $Y - Y$ (care nu trece prin material) se exprimă prin λ_{Yi} (intervenind şi forţa tăietoare şi natura legăturilor - în cazul nostru zăbreluţe).

$$\lambda_{Yi} = \sqrt{\lambda_Y^2 + 27 \frac{A}{Ad}}$$

unde A - secţiunea celor două profile I 26

Ad - secţiunea celor 2 zăbreluţe - care se vor alege din 50 x 50 x 6 în cazul îmbinării lor cu cordoane de sudură.

Punînd condiţia ca $\lambda_z = \lambda_{Yi}$, efectuînd o serie de calcule obţinem distanţa a, respectiv 2 d dintre profile.

$$\lambda_Z = \lambda_{Yi} = \sqrt{\lambda_Y^2 - 27 \frac{A}{AD}} = \sqrt{77^2 - 27 \frac{106,8}{2 \times 5,69}} = 75$$

De aici rezulta :

$$i_Y = \frac{l_f}{\lambda_Y} = \frac{800}{75} = 10,7 \text{ cm}$$

şi

$$I_Y = 2 (I_y + Ad^2); \quad i_Y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$\Sigma Y = i^2 Y \ . \ A = 10,7^2 \times 106,8 = 12300 \ cm^4$$

adică

$$12300 = 4 \ (288 + 56,4 \times d^2)$$

de unde :

$$a = \sqrt{\frac{12300 - 576}{106,8}} \simeq 10,5 \ cm,$$ sau distanţa dintre profile

$$2 \ d = 2 \times 10,4 = 21 \ cm$$

3). Pentru a verifica dacă secţiunea zăbreluţelor este sau nu suficientă, trebuie să calculăm efortul real din aceste diagonale dat de forţa tăietoare T a cărei expresie este :

$$T = \frac{A_{br}}{70\varphi} = \frac{106,8}{70 \times 0,733} = 4,08 \ T$$

Efortul din diagonale (zăbreluţe) este :

$$4 \ D \cos \alpha = T$$

$$D = \frac{T}{2 \cos \alpha} \ ; \ \sphericalangle \alpha \quad \text{se apreciază } 45^0$$

$$D = \frac{2080}{2 \times 0,7} = 1490 \ kg$$

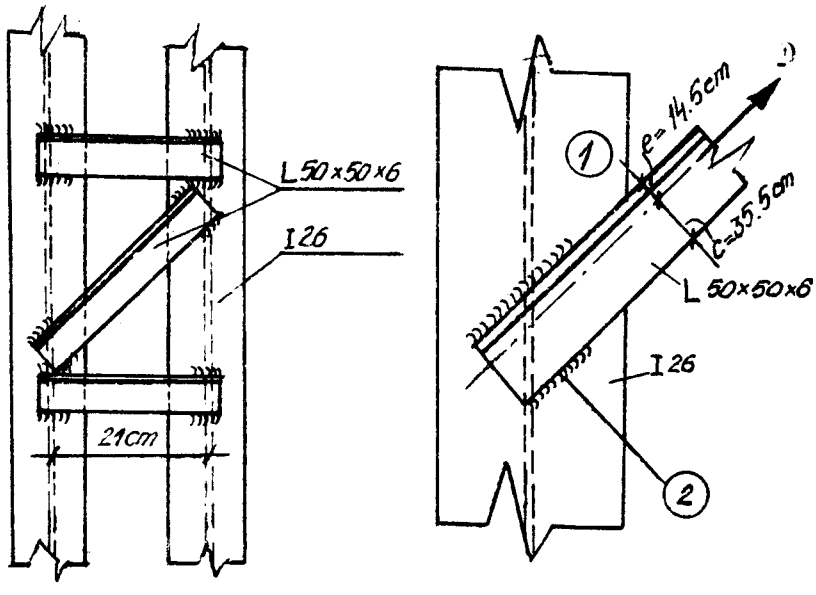


Fig. 371

Zăbreluţele sînt supuse la efortul D, care poate fi atît de compresiune cît şi de întindere, deci se va verifica şi la întindere şi la compresiune, trebuind să reziste în ambele cazuri.

La întindere $\sigma_{er} = \frac{D}{A_{net}} < \sigma_a$

La compresiune $\sigma_{er} = \frac{D}{A_{br} \varphi} < \sigma_a$

In cazul îmbinărilor suduate $A_{br} = A_{net}$, deci vom verifica

în situaţia cea mai defavorabilă, adică la compresiune (flambaj).

- lungimea de flambaj a zăbreluţei: $l_f = \frac{2\,d}{\cos\gamma} = \frac{2 \cdot 1}{0,7} = 30$ cm

- coeficientul de subţirime : $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{l_f}{i_y} = \frac{30}{0,96} = 31,3$

- coeficientul de flambaj se găseşte în tabele : $\varphi = 0,947$

Verificarea se face cu expresia :

$$\sigma_{er} = \frac{1490}{5,69 \times 0,947} = 276 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Cordoanele de sudură 1 şi 2 se vor dimensiona la efortul efectiv D din zăbreluţă (diagonală) şi nu la efortul ei capabil.

Cordonul 1 preia un efort D_1, iar cordonul 2 un efort D_2:

e = 1,45 cm

$$D_1 = D\,\frac{c}{e+c} \qquad D_2 = D\,\frac{e}{e+c}$$

c = 3,55 cm

$$D_1 = 1490\,\frac{3,55}{5,0} = 1060 \text{ kg}$$

$$D_2 = 1490\,\frac{1,45}{5,0} = 430 \text{ kg}$$

Cordoanele de sudura se vor executa având a = 0,4 cm, (minimum constructiv) întrucît efortul este foarte mic.

$$l_{1c} = \frac{D_1}{a\,\gamma_{as}} = \frac{1060}{0,4 \times 910} = 2,9 \text{ cm} \qquad l_{2c} = 1,18 \text{ cm}$$

Lungimile totale vor fi :

$$l_{1t} = l_{1c} + 2a = 2,9 + 2 \times 0,4 = 3,7 \text{ cm}$$

$$l_{2t} = l_{2c} + 2a = 1,18 + 2 \times 0,4 = 1,98 \text{ cm}$$

Lungimea totală a cordoanelor din punct de vedere al rezistenţei materialelor rezultă :

$l_{1t} = 4$ cm

$l_{2t} = 4$ cm

Constructiv se vor alege de cîte 5 cm.

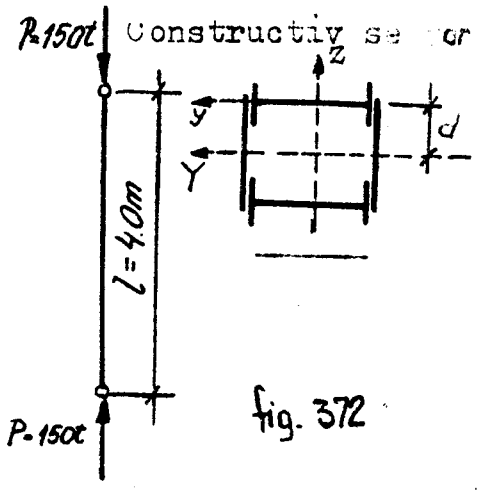


fig. 372

9.14.- Se dă stîlpul din figura.

Se cere :

1.- Să se dimensioneze stîlpul la flambaj, avînd o secţiune compusă din două profile I solidarizate cu plăcuţe.

2.- Să se alcătuiască secţiunea şi să se calculeze distanţa dintre plăcuţe.

3.- Sa se dimensioneze placuţele şi prinderea lor în două variante: cu cordoane de sudură şi cu nituri.

Se da $\lambda_{1\ max} = 50$; λ_1 este coeficientul de subţirime al unui singur element (între doua placuţe).

1). Prin dimensionarea stîlpului se înţelege gasirea profilelor astfel încît acţiunea să reziste la flambaj în raport cu axa $Z-Z$.

Dimensionam la compresiune :

$$A_{nec} = \frac{170000}{14000} = 121\ cm^2$$

Alegem o secţiune efectivă mai mare întrucît intervine şi fenomenul de stabilitate.

In cazul nostru vom alege 2 I 30: $i_z = 11,9$ cm

$A = 2 \times 69,1 = 138,2\ cm^2$

$$\lambda_z = \frac{400}{11,9} = 33,6 \longrightarrow \varphi_z = 0,937$$

$$\sigma_{ef} = \frac{170000}{138,2 \times 0,937} = 1310\ kg/cm^2 < 1400\ kg/cm^2$$

2). La alcătuirea secţiunii se pune problema găsirii distanţei 2 d dintre profile. Pentru a gasi distanţa d punem condiţia ca pericolul de flambaj în raport cu ambele direcţii principale de inerţie să fie egal. Insă în timp ce în raport cu axa Z, care trece prin material, pericolul de flambaj se exprima prin coeficientul de subţirime λ_z, în raport cu axa care nu trece prin material, respectiv $Y-Y$ stabilitatea sau instabilitatea se exprimă prin coeficientul de subţirime ideal λ_{Y_i} care cuprinde în expresia sa influenţa forţei taietoare precum şi a modului de solidarizare.

Astfel la secţiuni solidarizate cu placuţe lucrul acesta se exprimă astfel :

$$\lambda_z = \lambda_{Y_i} = \sqrt{\lambda_Y^2 + \frac{n}{2}\lambda_1^2}$$

unde n este numarul de elemente solidarizate

Din relaţia de mai sus se determina λ_Y - alegînd $\lambda_1 = 25$ (care trebuie să fie mai mic decît λ_z).

$$\lambda_Y = \sqrt{\lambda_z^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{33,6^2 - 25^2} = 22,45$$

$$i_Y = \frac{l_f}{\lambda_y} = \frac{400}{22,45} = 17,8\ cm$$

Dar : $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{2\left(I_y + A_1 d^2\right)}{2\,A_1}}$ de unde :

$$d = \sqrt{\frac{A_1 i_y^2 - I_y}{A_1}} = \sqrt{\frac{69{,}1 \times 17{,}8^2 - 451}{69{,}1}} = 17{,}6 \text{ cm}$$

3). Distanţa dintre placuţele: $l_1 = \lambda_1 . i_{min} = \lambda_1 . i_y =$

$= 25 \times 2{,}56 = 64$ cm.

Alegem $l_1 = 60$ cm

Forţa taietoare considerata constantă este data de relaţia :

$$T = \left(\frac{A_b}{70\varphi}\right) = \frac{2 \times 64{,}1}{70 \times 0{,}937} = 2{,}12\ T$$

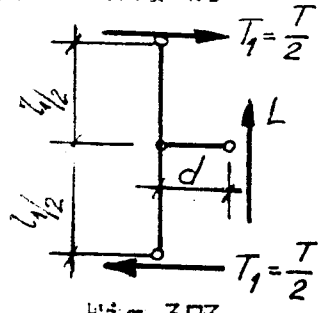


Fig.373

Schema statica care se adopta este cea din figura alaturata.

Placuţa trebuie calculata la forţa de lunecare L :

$$L = \frac{T_1 \, l_1}{2\,d} = \frac{1060 \times 60}{2 \times 17{,}6} = 1810 \text{ kg}$$

iar momentul incovoietor dat de forţa de lunecare în punctul de încastrare al plăcuţei este :

$M = L.\ d = 1810 \times 17{,}6 = 31900$ kg.cm

A) Varianta cu placuţe nituite :

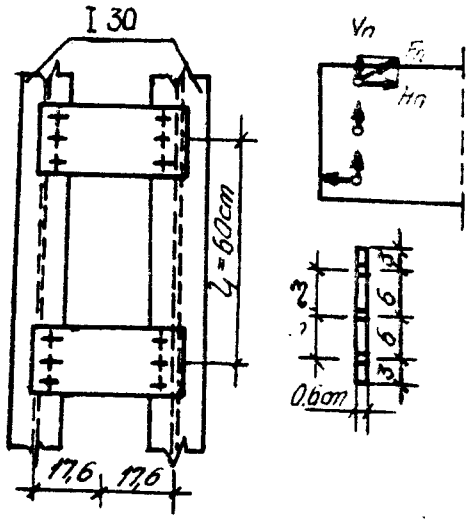


Fig. 374

Considerînd ca slăbirea produsa de nituri ar fi circa 20% şi alegînd grosimea plăcuţei de 6 mm, calculăm inaltţimea ei :

$$W_{br\ nec} = 1{,}2\ W_{net\ nec} = 1{,}2\ \frac{M_{max}}{\sigma_a} = 1{,}2\ \frac{31900}{1400} = 27{,}3\ cm^3 = \frac{0{,}6\ h^2}{6}$$

de unde :

$$h_{nec} = \sqrt{\frac{6\ W_{br}}{0{,}6}} = \sqrt{\frac{6 \times 27{,}3}{0{,}6}} = 16{,}5 \text{ cm}$$

Alegem h = 18 cm

Niturile vor avea diametrul Ø 17 - grosimea minimă a piesei îmbinate fiind de 6 mm.

Considerîn că solidarizarea se va face cu 3 nituri, să verificăm dacă nit.rile sînt capabile să preia eforturile care le revin. Datorită forţei tăietoare T = L , vor apare în fiecare

nit cîte o reacţiune :

$$V_n = \frac{L}{3} = \frac{1810}{3} = 603 \text{ kg}$$

Datorită momentului M se încarcă niturile extreme cu :

$$H_n = \frac{M}{2e} = \frac{31900}{12} = 2670 \text{ kg}$$

Deci niturile extreme sînt solicitate la o forţă rezultantă.

$$F_n = \sqrt{V_n^2 + H_n^2} = \sqrt{603^2 + 2670^2} \quad 2850 \text{ kg}$$

Un nit Ø 17, poate prelua prin forfecare şi strivire:

$$R_f = 1 \times \frac{\pi \cdot 1,7^2}{4} \cdot 1120 = 3200 \text{ kg}$$

$$R_p = 0,6 \times 1,7 \times 2800 = 2860 \text{ kg}$$

Deci $F_n < R_{min}$, adică forţa totală la care e solicitat nitul nu depăşeşte rezistenţa sa minimă (la presiune pe găuri) Nu ne mai rămîne decît sa verificam dacă plăcuţa rezistă în condiţii bune în secţiunea sa slabită.

$$I_{br} = \frac{0,6 \times 18^3}{12} = 290 \text{ cm}^4$$

Slăbirile produse de cele 3 nituri sînt exprimate prin:

$$\Delta_1 = 3 \cdot \frac{0,6 \times 1,7^3}{12} + 2 \times 0,7 \times 1,7 \times 6^2 = 70,5 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerţie net va fi :

$$I_{net} = I_{br} - \Delta_1 = 240 - 70,5 = 219,5 \text{ cm}^4$$

Modulul de rezistenţă şi rezistenţa efectivă sînt:

$$W_{net} = \frac{I_{net}}{y_{max}} = \frac{219,5}{9,0} = 24,4 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} = \frac{31900}{24,4} = 1310 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

B). Varianta cu plăcuţe sudate.

T = 1810 kg.

M = 31900 kg.cm

Dimensionarea plăcuţei (admiţînd grosimea ei de 6 mm):

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{31900}{1400} = 22,8 \text{ cm}^2 = \frac{0,6 \times h^2}{6}$$

$$h = \sqrt{\frac{6 \times 22,8}{0,6}} = 15,05 \text{ cm} \quad \text{alegem } h = 15 \text{ cm}$$

Verificăm rezistenţa efectivă :

$$W_{ef} = \frac{0,6 \times 15^2}{6} = 22,5 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} = \frac{31900}{22,5} = 1420 \text{ kg/cm}^2 > 1400 \text{ kg/cm}^2$$ (se admite depăşirea fiind sub 2%).

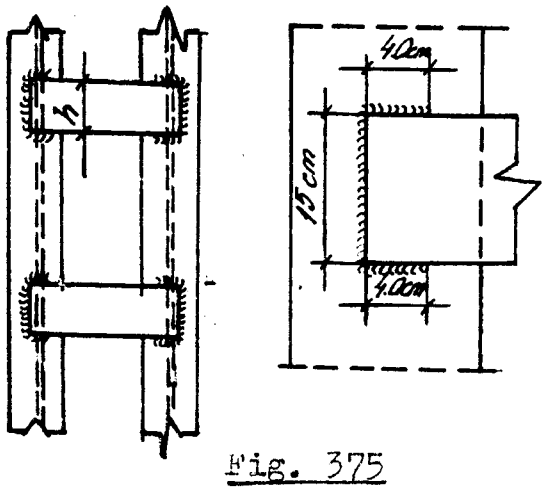


Fig. 375

Verificarea sudurii se face la rezultanta acţiunii atît a forţei tăietoare cît şi a momentului încovoietor :

$$\tau_1 = \frac{T_1}{A_{sud}} = \frac{1810}{9,65} = 178 \text{ kg/cm}^2$$

Elementele sudurii fiind:

$a=0,7x0,6=0,42$ cm $A_{sud}=0,42x23=$
$= 9,65 \text{ cm}^2$

$$I_{sud} = \frac{0,42 \times 15^3}{12} + 2 \times 4 \times 0,42 \times 7,71^2 = 318 \text{ cm}^4$$

$$W_{sud} = \frac{318}{7,92} = 40,2 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{W_{sud}} = \frac{31900}{40,2} = 795 \text{ kg/cm}^2$$

Rezultă că σ final rezultant al celor 2 eforturi unitare tangenţiale este :

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{178,^2 + 795^2} = 815 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{ad\ sud.}$$
$$= 0,65 \sqrt{} a = 910 \text{ kg/cm}^2$$

înseamnă deci că coordonatele sudate rezistă.

Lungimea totala a cordonului de sudură va fi :

$$L_s = L_0 + 2\ a = 23 + 2 \times 0,42 = 23,84 \cong 24 \text{ cm}$$

9.15.- Se dă stîlpul cu secţiunea compusă din figură. Se cere :

1.- Să se dimensioneze secţiunea stîlpului din doua profile U.

2.- Să se alcătuiască secţiunea, solidarizarea făcîndu-se cu zăbrelute nituite.

3.- Să se dimensioneze şi să se verifice zăbrelutele şi prinderea lor cu nituri.

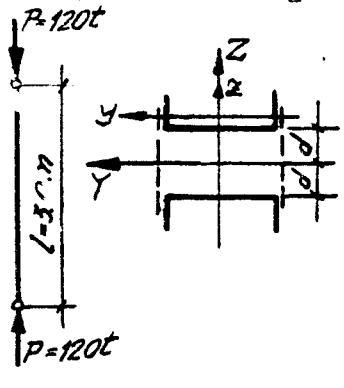


Fig. 376

1.- Prin dimensionarea secţiunii, se înţelege găsirea profilelor care compun secţiunea în aşa fel încît secţiunea

mai piardă stabilitatea în raport cu axa Z - Z .

În acest scop vom dimensiona la compresiune critică :

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{120000}{1400} = 85,8 \text{ cm}^2$$

şi vom alege o secţiune mai mare, întrucît intervine şi fenomenul de flambaj.

În cazul nostru vom alege 2 U 26 a căror caracteristici geometrice sînt: suprafaţa $A_{el} = 2 \times 48,3 = 96,6 \text{ cm}^2$ şi raza de giraţie $i_z = 9,99$ cm.

Facem verificarea la flambaj cu expresia :

$$\sigma_{er} = \frac{P}{A\varphi} = \frac{120000}{96,6 \times 0,953} = 1310 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Coeficientul de flambaj se deduce din :

$$\lambda_z = \frac{l_f}{i_z} = \frac{300}{9,99} \simeq 30 \longrightarrow \varphi = 0,953$$

2.- Alcătuirea secţiunii este determinată în afară de profilele U care s-au ales şi de distanţa 2 d dintre profile. Distanţa dintre profile se determină punînd condiţia ca pericolul de flambaj în raport cu axele principale de inerţie Y-Y şi Z-Z să fie acelaşi, adică $\lambda_z = \lambda_{Y_1}$ unde la secţiuni compuse, solidarizate cu zăbreluţe are expresia :

$\lambda_{Y_1} = \sqrt{\lambda_Y^2 + 27 \frac{A}{A_d}}$, datorită influienţei tăietoare.

unde A - secţiunea stîlpului - a celor două profile U

Ad- secţiunea a două zăbreluţe.

Secţiunea minima a zăbreluţelor în cazul îmbinării nituite este : L 60 x 40 x 6, iar $A_d = 2 \times 5,68 = 11,36 \text{ cm}^2$

Din relaţia: $\lambda_z = \lambda_{Y_1} = \sqrt{\lambda_{Y_2}^2 + 27 \frac{A}{Ad}}$, deducem valoarea coeficientului de suoţtirime :

$$\lambda_Y = \sqrt{\lambda_z^2 - 27 \frac{A}{A_d}} = \sqrt{30^2 - 27 \frac{96,6}{11,36}} = 26$$

Raza de giraţie : $i_Y = \frac{l_f}{\lambda_Y} = \frac{300}{26} = 11,5$ cm

Distanţa d se determină din relaţia :

$I_y = 2(I_y + A\, d^2)$, unde: I_y se calculează cu expresia :

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}$$

$$I_Y = i_Y^2 \cdot A = 11,5^2 \times 96,6 = 12800 \text{ cm}^4$$

$$12800 = 2\,(317 + 48,3\, d^2)$$

$$d = \sqrt{\frac{12800 - 634}{96,6}} = 11,1 \text{ cm}$$

5.- Vom alege nituri Ø 17, întrucît grosimea elementelui celui mai subţire este 6 mm.

Vom verifica pentru zăbrele care sînt supuse la întindere sau compresiune (dacă secţiunea aleasă este sau nu suficientă.

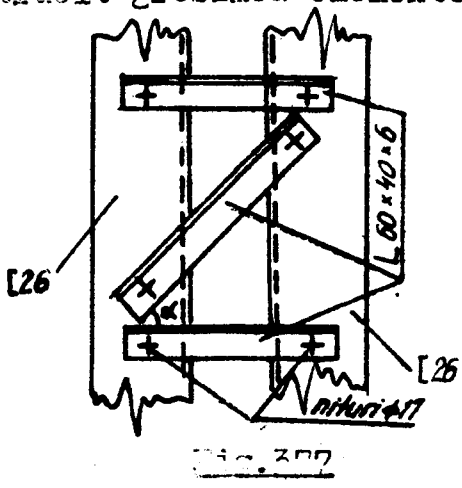


Fig. 277

Forţa tăietoare, considerată variind uniform pe înălţimea stîlpului, se calculează astfel :

$$T = \frac{A}{70\varphi} = \frac{0}{70 \times 0,953} = 1,315 \text{ T}$$

Efortul din diagonală (zăbreluţă) va fi :

$$D = \frac{T}{2 \cos\alpha} = \frac{1315}{2 \times 0,7} = 940 \text{ kg}$$

Unghiul α s-a considerat egal cu 45^0

La întindere verificarea se face cu expresia :

$$A_{net} = A_{br} - \Delta A = 5,68 - 1,7 \times 0,6 = 4,66 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{D}{A_{net}} = \frac{940}{4,66} = 202 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

La compresiune se verifică :

$$\sigma_{ef} = \frac{D}{A_{br}\varphi_{min}} < \sigma_{ad}$$

Pentru determinarea coeficientului de flambaj φ_{min} trebuie să facem cîteva calcule premergătoare :

Lungimea de flambaj a zăbreluţei este

$$l_f = \frac{2\,d}{\cos\alpha} = \frac{22,2}{0,7} = 31,8 \text{ cm}$$

raza de giraţie minimă a zăbreluţei este :

$$i_\eta = 0,85 \text{ cm}$$

Coeficientul de subţiere λ, se va calcula cu formula :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{31,8}{0,85} = 37,5 \quad \text{De unde rezultă } \varphi = 0,918$$

$$\sigma_{ef} = \frac{940}{5,68 \times 0,918} = 180 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă din verificarea eforturilor unitare normale în diagonală ar fi rezultat $\sigma_{ef} > \sigma_{ad}$, ar trebui refăcut întreg calculul, începînd de la coeficientul de subţiere λ_{yi}.

Calculul numărului de nituri se va face la efortul efectiv al zăbreluţei şi nu la cel capabil.

Rezistenţa minimă a nitului se alege comparînd rezistenţa nitului Ø 17 la presiune pe gaură şi la forfecare.

$$R_p = {}_{\parallel}\sigma''_{min} \cdot d \cdot \sigma_{ap} = 0,6 \times 1,7 \times 2800 = 2860 \text{ kg}$$

$$R_f = m \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tau_a = 1 \times \frac{\pi 1,7^2}{4} \cdot 1120 = 2550 \text{ kg} \quad R_{min} = 2550 \text{ kg}$$

Numărul de nituri se calculează cu relaţia :

$$n = \frac{D}{R_{min}} = \frac{940}{2550} = 0,36$$

Vom alege un nit Ø 17

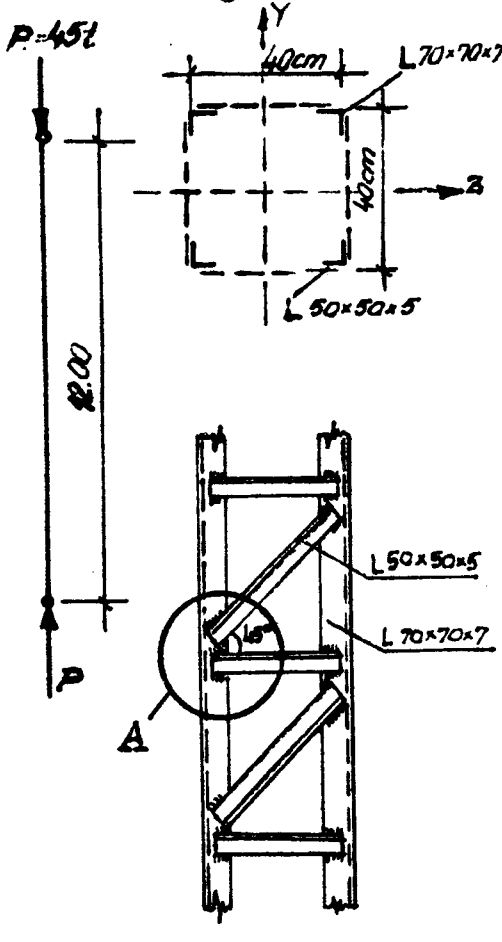


Fig.373

9.16.- Se dă stîlpul din figură, avînd o secţiune compusă, formată din 4 corniere L 70 x 70 x 7, solidarizate cu zăbreluţe L 50 x 50 x 5 sudate.

Să se verifice secţiunea stîlpului, zăbreluţele şi cordoanele de sudură.

Vom verifica stabilitatea stîlpului în ansamblu.

În acest sens, vom calcula momentul de inerţie şi raza de giraţie i:

$$I_z = I_Y = 4\left[42,4 + 9,40 \times (20 - 1,97)^2\right] = 12,370 \text{ cm}^4$$

$$i_z = i_Y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{12370}{4 \times 4,80}} = 25,4 \text{ cm}$$

Coeficientul de subţiere se calculează cu relaţia :

$$\lambda_z = \lambda_Y = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{1200}{25,4} = 47$$

Întrucît ambele direcţii principale de inerţie (Z - Z şi Y - Y) nu trec prin material, intervine şi forţa tăietoare şi mai mare prinderii încît va trebui să calculăm coeficientul de subţiere ideal, care în cazul solidarizării cu zăbrele este :

de forma : $\lambda_{Yi} = \sqrt{\lambda_Y^2 + 27 \frac{A}{Ad}}$

unde A este secţiunea stîlpului, în cazul nostru: A = 4 x 9,40 = 37,60 cm^2

iar Ad este secţiunea zăbrelelor: Ad = 4 x 4,80 = 19,2 cm^2

Inlocuind în expresia coeficientului de subţirime ideal, obţinem :

$$\lambda_{y_i} = \sqrt{47^2 + 27\frac{27,60}{19,2}} = 47,5$$

Găsim în tabele valoarea coeficientului de flambaj corespunzător :

$$\varphi = 0,873$$

Verificarea la flambaj se face cu formula :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} = \frac{45000}{37,6 \times 0,873} = 1370 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Verificarea zăbreluţelor sudate se face la compresiune-flambaj, considerîndu-le articulate la capete, Efortul din zăbrele :

$D = \frac{T}{2 \cos \alpha}$ unde T este forţa tăietoare considerată constantă în lungul stîlpului şi a cărei expresii este :

$$T = \frac{A}{70\varphi} = \frac{37,6}{70 \times 0,873} = 0,615 \text{ T} = 615 \text{ kg}$$

In consecinţă :

$$D = \frac{615}{2 \times 0,7} = 440 \text{ kg}$$

Lungimea de flambaj a zăbreluţei fiind :

$$l_f = \frac{36}{0,7} = 51,3 \text{ cm}$$

putem determina coeficientul de subţirime λ şi de flambaj φ a zăbreluţei, verificînd-o apoi la flambaj.

$$\lambda = \frac{l_f}{l_{min}} = \frac{l_f}{i_\eta} = \frac{51,3}{0,98} = 52,2 \text{ iar } \varphi = 0,852$$

$$\sigma_{ef} = \frac{D}{A\varphi} = \frac{440}{4,8 \times 0,852} = 108 \text{ kg/cm}^2$$

Efortul preluat de cordonul de sudură 1.D_1, şi cordonul 2.D_2, se calculează astfel :

$$D_1 = D \frac{c}{e+c} = 440 \frac{360}{5} = 317 \text{ kg}$$

$$D_2 = D \frac{e}{e+c} = 440 \frac{1,40}{50} = 123 \text{ kg}$$

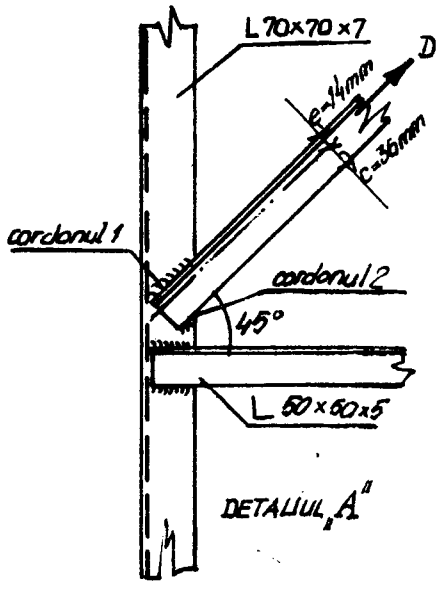


Fig.379

Lungimea totală a ambelor cordoane este 5 cm, iar lungimea lor de calcul va fi :

$l_c = l_f - 2\,a = 5{,}0 - 2 \times 0{,}4 = 4{,}2$ cm

Eforturile τ din cordoanele de sudură sînt :

$\tau_{1ef} = \frac{D_1}{a\,l\,c} = \frac{317}{0{,}4 \times 4{,}2} = 189$ kg/cm^2 $< \tau_{as} =$

$= 910$ kg/cm^2

$\tau_{2ef} = \frac{D}{a\,l\,c} = \frac{123}{0{,}4 \times 4{,}2} = 73$ kg/cm^2 $<$

$< \tau_{as} = 910$ kg/cm^2

Cordoanele de sudură sînt supradimensionate din motive constructive.

9.17.- Se dă stîlpul din lemn din figura de mai jos, avînd o secţiune compusă.

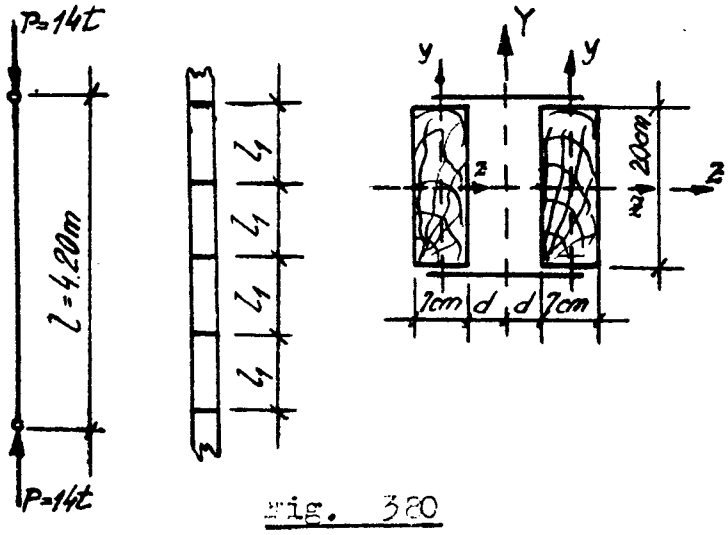


Fig. 380

Se cere :

1.- Sa se alcătuiască secţiunea.

2.- Să se verifice stîlpul la flambaj.

3.- Să se determine distanţa dintre legături, considerînd $\lambda_1 < 50$.

1). Pentru a alcătui secţiunea, trebuie determinată distanţa la care se vor pune elementele; aceasta se va face prin punerea condiţiei ca în raport cu ambele direcţii principale de inerţie (axele $Z - Z$ şi $Y - Y$) pericolul de flambaj să fie acelaşi, ceea ce revine la a scrie că momentele de inerţie în raport cu axele principale să fie egale, (uneori se pune condiţia ca $I_z = 1{,}2\,I_y$)

Momentul de inerţie în raport cu axa $Z - Z$ va fi dat de relaţia :

$$I_z = 2I_z = 2\,\frac{7 \times 20^3}{12} = 9340 \text{ cm}^4$$

În raport cu axa $Y - Y$ (axa care nu trece prin material) ţinînd cont că legăturile sînt deformabile, momentul de inerţie

se va calcula astfel :

$$I_{Y_c} = \frac{3}{4} \perp Y_o + \frac{1}{4} I_Y$$

unde : I_{Y_c} = momentul de inerţie (erectiv) al ansamblului, în raport cu axa Y-Y

$\perp Y_o$ = momentul de inerţie în raport cu axa Y-Y, al secţiunii care rezultă din alipirea secţiunilor componente.

$\perp Y$ - este momentul de inerţie teoretic al ansamblului în raport cu axa Y-Y

In cazul nostru :

$$I_{Y_o} = \frac{20 \times 14^3}{12} = 4580 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = 2 \left(\frac{20 \times 7^3}{12} + 7 \times 20 \times d^2 \right) = 1140 + 280\, d^2$$

Din relaţie :

$$I_z = I_{Y_c} = \frac{3}{4} \perp Y_o + \frac{1}{4} I$$

putem determina distanţa 2 a la care se vor pune elementele componente ale secţiunii ;

$$9340 = \frac{3}{4} 4580 + \frac{1}{4} (1140 + 280\, d^2)$$

$$a = \sqrt{\frac{9340 - 3715}{70}} = 9 \text{ cm}$$

2). Verificarea secţiunii o vom face în raport cu axa Z-Z (în raport cu axa Y-Y avem acelaş lucru, alegînd pe acest considerent distanţa dintre elemente) cu formula :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} \leq \sigma_{ac}$$

Calculînd :

$A = 2 \times 7 \times 20 = 280 \text{ cm}^2$

$i_\perp = i_z = 0{,}289 \times 20 = 5{,}78 \text{ cm}$

$$\lambda_{Y_i} = \lambda_Z = \frac{l_f}{i} = \frac{420}{5{,}78} = 72{,}7$$ rezultă $\varphi = 0{,}576$

atunci :

$$\sigma_{ef} = \frac{14000}{280 \times 0{,}576} = 87 \text{ kg/cm}^2 < 100 \text{ kg/cm}^2$$

3). Alegînd coeficientul de subţirime al unui singur element (între 2 legături) $\lambda_1 = 50$, putem determina lungimea l_1 dintre legături, pe baza relaţiei :

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{i_{min}} = \frac{l_1}{i_y} = 50$$

Am ales i_y, deoarece un element 7 x 20 cm va flamba în raport cu axa y - y.

$$i_y = 0{,}289 \times 7 = 2{,}03 \text{ cm}$$

De unde reiese distanţa dintre legături :

$$l_1 = i_y \times \lambda_1 = 2{,}03 \times 50 = 102 \text{ cm} \simeq 100 \text{ cm}$$

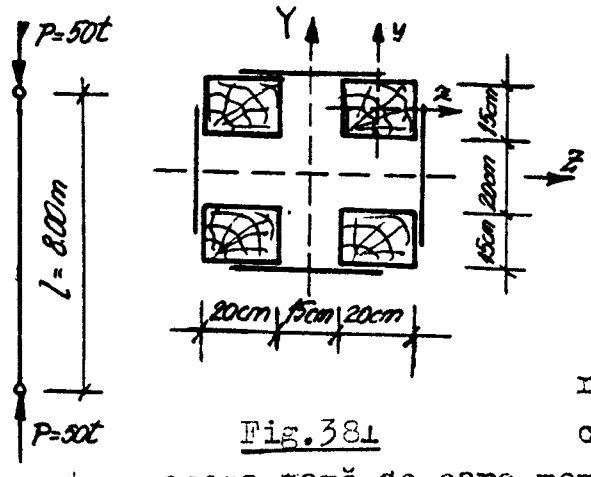


Fig.381

9.18.- Se da stîlpul de lemn din figura alăturata, avînd o secţiune compusă din 4 elemente dispuse ca în figura şi solidarizate între ele.

Se cere sa se verifice stabilitatea lui.

Vom verifica stabilitatea în raport cu direcţia principala cea mai defavorabila - adică în raport cu aceea faţă de care momentul de inerţie este minim.

In raport cu o axă care nu trece prin material - solidarizarile nefiind perfect rigide - momentul de inerţie se calculează cu expresia :

$$I_c = \frac{3}{4} I_o + \frac{1}{4} I$$

unde :

I_c = momentul de inerţie efectiv al ansamblului în raport cu axa respectivă,

I_o = momentul de inerţie al secţiunii care rezultă din alipirea secţiunilor componente.

I = momentul de inerţie teoretic al ansamblului în raport cu axa respectiva.

In cazul nostru, întrucît ambele axe Y-Y şi Z-Z nu trec prin material, momentele de inerţie în raport cu aceste axe vor fi :

$$I_{yc} = \frac{3}{4} I_{yo} + \frac{1}{4} I_y$$

$$I_{Zc} = \frac{3}{4} I_{Zo} + \frac{1}{4} I_Z$$

iar

$$I_{yo} = 2 \times \frac{15 \times 40^3}{12} = 160.000 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 4 \left(\frac{15 \times 20^3}{12} + 15 \times 20 \times 17{,}5^2\right) = 404.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{Zo} = 2 \times \frac{20 \times 30^3}{12} = 90.000 \text{ cm}^4$$

$$I_Z = 4\left(\frac{20 \times 15^3}{12} + 20 \times 15 \times 17{,}5^2\right) = 386.480 \text{ cm}^4$$

Atunci :

$$I_{yc} = \frac{3}{4} \times 160.000 + \frac{1}{4}\, 404.000 = 221.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{Zc} = \frac{3}{4}\, 90.000 + \frac{1}{4}\, 386.480 = 164.020 \text{ cm}^4$$

Se vede că $I_{min} = I_{Zc} = 164.020 \text{ cm}^4$

In consecinţa vom verifica dacă stîlpul nu va flamba în raport cu axa Z-Z, axa în raport cu care pericolul de flambaj e mai mare :

$$A = 4 \times 15 \times 20 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$i_{min} = i_Z = \sqrt{\frac{I_{Zc}}{A}} = \sqrt{\frac{164.020}{4 \times 300}} = 11{,}7 \text{ cm}$$

Coeficientul de subţirime se determină cu formula :

$\lambda_Z = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{800}{11{,}7} = 68{,}5$; rezultă coeficientul de flambaj corespunzator $\varphi = 0{,}625$

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi} = \frac{60.000}{1200 \times 0{,}625} = 66{,}7 \text{ kg/cm}^2 < 100 \text{ kg/cm}^2$$

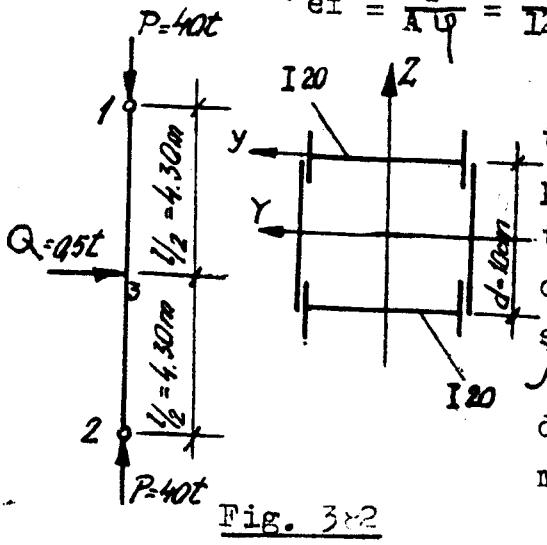


Fig. 3.2

9.19.- Se da stîlpul din figură alcatuit dintr-o secţiune compusa din două profile I (solidarizarea se face cu ajutorul plăcuţelor). Se cere să se verifice stabilitatea lui după metoda exacta şi cea aproximativa (Iasinski). Se dă : $\lambda_1 = 50$ (λ_1 reprezintă coeficientul de subţirime minim al unui singur element, între doua placuţe.

Am notat cu z.y axele principale de inerţie care trec prin centrul de greutate al unui singur element şi cu Z.Y axele principale de inerţie ale ansamblului.

Pentru verificarea stabilităţii cu metoda exactă, în raport cu axa Z.Z, va trebui să calculam deplasarea maxima f datorită sarcinii transversale Q.

Vom calcula săgeata cu ajutorul metodei grinzilor conjugate :

$$V_1 = \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^2}{16}$$

$$\overline{M_3} = \frac{Q l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q l^2}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Q l^3}{48}$$

$$f_o = y_3 = \frac{Q l^3}{48 E I_z} = \frac{500 \times 860^3}{4 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 2 \times 4280} =$$

$$= 0{,}725 \text{ cm}$$

$$I_z = 2 I_z = 2 \times 2140 = 4280 \text{ cm}^4$$

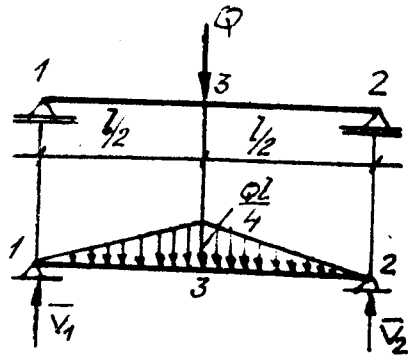


Fig. 382

Dar deplasarea laterală f_o este mărită datorită forţei axiale P ceea ce face ca săgeata în final să aibă expresia :

$$f = \frac{f_o}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

Sarcina critică se va calcula cu relaţia $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_f^2}$, întrucît $\lambda_z = \frac{l_f}{i_z} = \frac{860}{8} = 107{,}5$ este mai mare decît 105, ceea ce permite aplicarea formulei de mai sus, flambajul producîndu-se în domeniul lui Euler.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 4280}{860^2} = 119{,}000 \text{ kg.}$$

Atunci $f = \frac{0{,}725}{1 - \frac{40000}{111000}} = 1{,}1$ cm

Momentul încovoietor total M_z^* va proveni din însumarea momentului încovoietor M_z din sarcinile transversale şi a celui provenit din sarcina maximă P egal ca valoare cu Pf.

$$M_z^* = M_z^o + Pf = \frac{500 \times 860}{4} + 40000 \times 1{,}1 = 107000 + 44000 = 151000 \text{ kg.cm.}$$

Verificarea stabilităţii în raport cu axa Z-Z, se face cu expresia :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A} + \frac{M_z^*}{W_z} = \frac{40000}{2 \times 33{,}5} + \frac{151000}{2 \times 214} = 596 + 352 = 948 \text{ kg/cm}^2$$

In raport cu axa Y-Y, sarcinile transversale nu intervin, verificarea făcîndu-se numai la forţa axială P :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A \varphi_Y} < \sigma_{ac}$$

In acest scop trebuesc determinate anumite caracteristici geometrice:

Momentul de inerţie: $I_y = 2(I_y + A d^2) = (117 + 33{,}5 \times 10^2) = 6934 \text{ cm}^4$

raza de giraţie: $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{6934}{67}} = 10{,}2$ cm

Coeficientul de subţirime ideal λ_y i are valoarea Y-Y

nu trece prin material, deci se ţine cont de forţa tăietoare şi de natura solidarizării celor 2 elemente) $\lambda_{yi}=\sqrt{\lambda_y^2+\lambda_1^2}$

$$\lambda_{yi}=\frac{l_f}{I_y}=\frac{860}{10,2}=84;\quad \lambda_1=50$$

$$\lambda_{yi}=\sqrt{84^2+50^2}=98$$

Coeficientul de flambaj corespunzător este: $\varphi_y=0,533$

$$\sigma_{ef}=\frac{40000}{2\times 33,5\times 0,5333}=1120\ kg/cm^2 \ < \ 1400\ kg/cm^2$$

Verificarea stabilităţii după metoda Iasinski se face cu relaţia :

$$\sigma_{ef}=\frac{P}{A\varphi_{min}}+\frac{Mz}{Wz}=\frac{40000}{2\times 33,5\times 0,533}=\frac{107000}{2\times 214}=1120+$$
$$+214=1336\ kg/cm^2$$

unde :

φ_{min} - este coeficientul de flambaj în raport cu axa de inerţie principală faţă de care pericolul de flambaj este mai mare,

în cazul nostru - axa Y - Y.

Mz - este momentul încovoietor dat de sarcinile transversale.

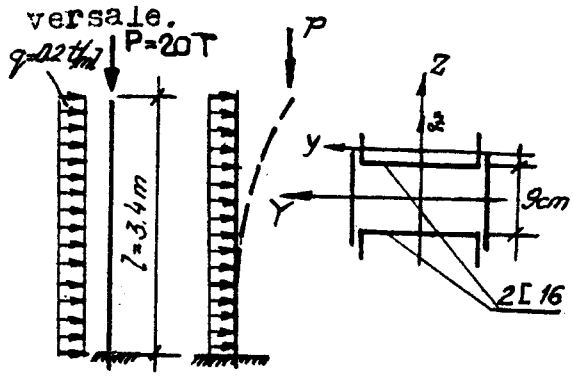


Fig.384

9.20.- Se dă stîlpul din figură, alcătuit dintr-o secţiune compusă (solidarizarea se face cu plăcuţe). Se cere să se verifice stabilitatea lui, după metoda exactă şi cea aproximativă (Iasinski). Se dă: $\lambda_1=50$, P = 20 t.

λ_1 reprezintă coeficientul de subţirime al unui singur element între două legături (plăcuţe) şi care constructiv nu poate depăşi valoarea $\lambda_1=50$.

Am notat cu y,z axele principale care trec prin centrul de greutate al unui singur element şi cu Y şi Z, axele principale de inerţie ale sistemului.

Verificarea stabilităţii după metoda exactă, se face cu expresiile :

$$\sigma_{ef}=\frac{P}{A}+\frac{Mz}{Wz}^{*} \ < \sigma_{ac}$$ în raport cu axa Z-Z şi

$$\sigma_{ef}=\frac{P}{A\varphi} < \sigma_{ac}$$ în raport cu axa Y-Y

M_z^* este momentul încovoietor în raport cu axa Z-Z, datorită sarcinilor transversale Mo, şi datorită forţei axiale P

$M_z^* = M_z^o + Pf$;

în această relaţie f este sageata datorită sarcinilor transversale, ţinînd cont şi de influenţa sarcinii P :

$$f = \frac{fo}{1 - \frac{P}{Pcr}}$$

fo - reprezintă săgeata dată de sarcinile transversale

$1 - \frac{P}{Pcr}$ - reprezintă influenţa flambajului.

In primul rînd se calculează fo - deplasarea maximă datorită sarcinilor transversale q -

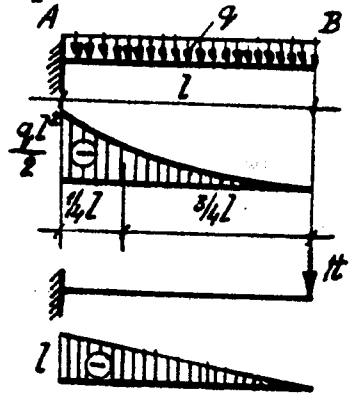


fig.385

Deplasarea maximă va fi în punctul B şi aplicînd metoda Vereşceaghin găsim direct y_B sau fo:

$$fo = y_B = \frac{1}{EI_z} \frac{1}{3} \frac{ql}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l = \frac{ql^4}{8\,EIz}$$

In cazul nostru :

$$fo = \frac{2 \times 3,4^4 \times 100^4}{2 \times 2,1 \times 10^6 \times 2 \times 945} = 0,85 \text{ cm}$$

Pentru a-l calcula pe f, trebue sa cunoaştem sarcina critică. In acest scop vom determina coeficientul de subţiriime λ_z .

$\lambda_z = \frac{l_f}{i_z} = \frac{680}{6,28} = 109$, deci putem aplica formula lui Euler

$$Pcr = \frac{\pi^2 EIz}{l_f^2} = \frac{\pi^2 \times 2,1 \times 10^6 \times 1850}{680^2} = 82,600 \text{ kg}$$

Deci :

$$f = \frac{fo}{1 - \frac{P}{Pcr}} = \frac{0,85}{1 - \frac{20000}{82600}} = 1,12 \text{ cm}$$

Momentul încovoietor total este suma momentelor încovoietoare date de sarcinile transversale şi de sarcina axială.

$$M_z^* = M_z^o + Pf = \frac{2 \times 340^2}{2} + 20000 \times 1,12 = 115000 + 22600 =$$

$$= 137600 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Verificarea stabilităţii în raport cu axa Z, se face cu formula:

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A} + \frac{M_z^*}{W_z} = \frac{20000}{2 \times 24} + \frac{137600}{2 \times 116} = 1012 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2$$

In raport cu axa Y-Y, acţiunea forţelor transversale nu se resimte, deci calculul se va face numai la acţiunea sarcinii axiale P. Momentul de inerţie în raport cu axa Y-Y, se calculează cu expresia:

$$I_y = 2\,(I_y + Ad^2) = 2\,(85{,}3 + 24 \times 6{,}34^2) = 2110\ cm^4$$

Raza de giraţie i_y este :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{2110}{2 \times 24} = 6{,}6\ cm$$

Coeficientul de subţirime λ_y va fi :

$$\lambda_y = \frac{l_f}{i_y} = \frac{680}{6{,}6} = 103$$

Întrucît axa Y-Y nu trece prin material, solidarizarea făcîndu-se prin plăcuţe, se va considera şi influenţa forţei tăietoare, iar coeficientul de subţirime se va calcula cu expresia :

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} = \sqrt{103^2 + 50^2} = 115$$

Coeficientul de flambaj corespunzător va fi: $\varphi_y = 0{,}519$

Atunci :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi_Y} = \frac{20000}{2 \times 24 \times 0{,}519} = 802\ kg/cm^2$$

Formula aproximativă a lui Iasinski deşi nu are o fundamentare strict teoretică, are o mare utilizare în practică, fiind acoperitoare. Expresia ei este :

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A\varphi_{min}} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{20000}{2 \times 24 \times 0{,}519} + \frac{115000}{2 \times 116} = 802 + 497 = 1299\ kg/cm^2$$

unde: φ_{min} este coeficientul de flambaj minim în raport cu una din axele principale (în cazul nostru φ_y)
iar Mz este momentul încovoietor maxim provenit numai din sarcinile transversale. In cazul nostru

$$M_z = \frac{2 \times 240^2}{2} = 115.000\ kg.cm$$

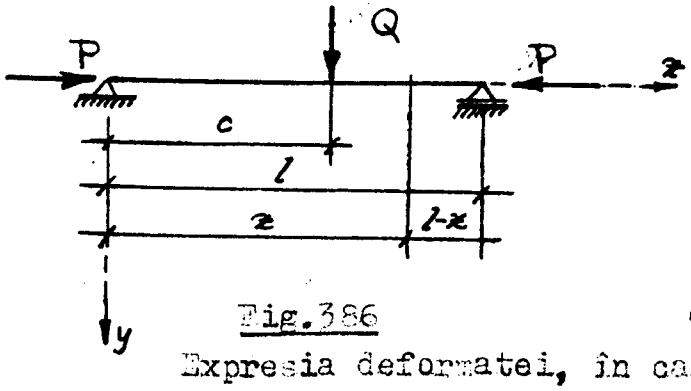


Fig.386

9.21.- Să se studieze rezistenţa şi deformaţia grinzii din figură, supusă la sarcina axială P şi la o sarcină transversală Q_1 apliçată la distanţa c de reazem.

Caz particular : $C = \frac{1}{2}$

Expresia deformatei, în cazul aplicării sarcinii P şi Q este (pe cele 2 porţiuni ale grinzii), următoarea :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py\frac{\partial c}{I} = -M(x_1)$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py - \frac{Q(l-c)}{l}(l-x) = -M(x_2)$$

Notînd cu α^2 :

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

Soluţiile ecuaţii diferenţiale vor fi :

$$y = A_1\cos\alpha x + B_1\sin\alpha x - \frac{Q}{P}x$$

$$y = A_2\cos\alpha x + B_2\sin\alpha x - \frac{Q}{P}(l-x)$$

Condiţiile pe care le punem pentru determinarea constantelor sînt două pe reazeme :

Pentru $x = 0$, $y = 0$ de unde $A_1 = 0$

Pentru $x = l$, $y = 0$ de unde $A_2 = -B_2\,tg\,\alpha l$

şi 2 în dreptul sarcinii Q, unde vom putea scrie că rotirile şi deplasările din cele două porţiuni sînt egale :

$$B_1\sin\alpha(l-c) = B_2\left[\sin\alpha(l-c) - tg\,\alpha l\cos\alpha(l-c)\right]$$

$$B_1\alpha\cos\alpha(l-c) = B_2\alpha\left[\cos\alpha(l-c) + tg\,\alpha l\sin\alpha(l-c)\right] + \frac{Q}{P}$$

de unde :

$$B_1 = \frac{Q\sin\alpha c}{P\sin\alpha l} \text{ iar } B_2 = -\frac{Q\sin\alpha(l-c)}{P\alpha\,tg\,\alpha l}$$

Înlocuindu-le în expresiile de mai sus, vom putea obţine pentru ambele porţiuni deplasările şi rotirile după cum urmează:

$$y = \frac{Q\sin\alpha c}{P\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha x - \frac{Qc}{PI}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q\sin\alpha x}{\sin\alpha l}\cos\alpha x - \frac{Qc}{PI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Q\alpha\sin\alpha c}{\sin\alpha l}\sin\alpha x$$

Şi,

$$y = \frac{Q\sin\alpha(l-c)}{P\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha(l-x) - \frac{Q(l-c)}{PI}(l-x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q\sin\alpha(l-c)}{P\sin\alpha l}\cos\alpha(l-x) + \frac{Q(l-c)}{PI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q\alpha\sin\alpha(l-c)}{P\sin\alpha l}\sin\alpha(l-x)$$

Pentru cazul particular cînd sarcina se găseşte la mijlocul deschiderii ($c = \frac{l}{2}$), deplasarea maximă în dreptul sarcinei va avea expresia :

$$y_{max} = |y|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Q}{2P\alpha} \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{Q}{2P}\frac{l}{2}$$

Notînd: $\frac{P}{4}\frac{l^2}{EI} = \frac{\alpha^2 l^2}{4} = u^2$, **relaţia de** mai sus devine :

$$y_{max} = |y|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Q}{2\alpha P}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right) = \frac{Q \cdot l^3}{4EI}\cdot\frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3}u^3}$$

Primul factor al **expresiei** reprezintă deformaţia produsă de sarcina transversală Q iar **partea** a doua se poate considera ca un factor simplificator **al deplasării** produse de sarcina Q, datorită sarcinii axiale P .

Cînd valoarea lui P este mic în raport cu sarcina critică $P_{cr} = E I \frac{\pi^2}{l^2}$, cantitatea u este mică - neglijabilă.

In cazul cînd valoarea sarcinii axiale se apropie de sarcina critică coeficientul u se apropie de valoarea $\frac{\pi}{2}$, iar deplasarea creşte nedefinit. Momentul încovoietor maxim va fi :

$$M_{max} = M_{x=\frac{l}{2}} = -EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = E I \frac{Q\alpha}{2P}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} = \frac{Q l}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg} u}{u}$$

Se vede că şi în expresia momentului încovoietor, influenţa forţei P se reciră prin factorul $\frac{\operatorname{tg} u}{u}$, care în cazul cînd, forţa axială se apropie de sarcina critică, devine foarte mare.

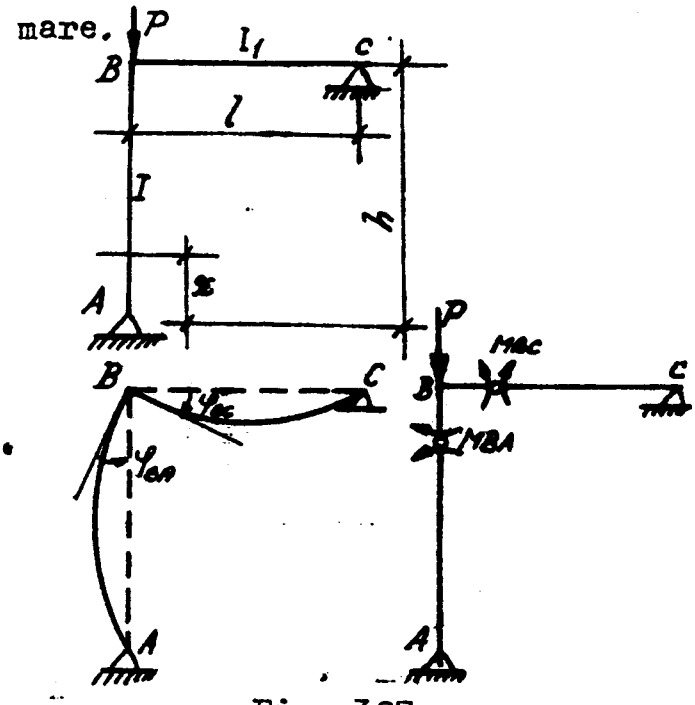


Fig. 387

9.22.- Se dă un cadru dublu articulat, avînd caracteristicile geometrice din figură. Se cere să se determine valoarea critică a sarcinii P (P_{cr}).

Ecuaţia diferenţială pentru fibra medie a unei bare avînd sarcini transversale şi forţă axială constantă, care se obţine prin scrierea ecuaţiilor de echilibru pe forma deformată în domeniul elastic, este :

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = \frac{q(x)}{EI}$$

în care :

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

Soluţia acestei ecuaţii în cazul cînd q = 0 are forma:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C4$$

cele 4 constante determinîndu-se în funcţie de condiţiile de la capete.

Pentru bara AB aceste condiţii se pun astfel :

pentru x = 0 $\begin{cases} y = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$

Pentru x = h $\begin{cases} y = 0 \\ \varphi_{BA} = \varphi_{AB} \end{cases}$

In momentul pierderii stabilităţii, nodul se roteşte şi apare un moment în capătul B al barei AB (M BA), care trebue să fie egal cu momentul în capătul barei B al barei BC (M BC)

Ţinînd seama de deformata barei AB rezultă :

$$M_{BA} = - EIy''_{x=h} = M_{BC} = EI \alpha 2 \ (C_1 \sin \alpha h + C_2 \cos \alpha h)$$

φ_{BC} reprezintă rotirea barei simplu rezemate BC, datorită momentului M_{BC} şi are valoarea :

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{BC} l}{3 EI_1}$$

Cu aceste precizări, din condiţiile la limită se obţine:

$C_2 + C_4 = 0$

$C_2 = 0$ deci şi $C_4 = 0$

$C_1 \sin \alpha h + C_3 \cdot h = 0$

$$\alpha C1 \cos \alpha h + C_3 = \frac{E I \alpha^2 l}{3 EI_1} C_1 \sin \alpha h$$

Eliminînd pe C_3, rezultă :

$$C_1 \left[\alpha \cos \alpha h - \sin \alpha h \left(\frac{1}{n} + \frac{\alpha^2 l}{3} \frac{I}{I_1} \right) \right] = 0$$

In această ecuaţie $C_1 \neq 0$ (în caz contrar bara nu ar fi flambat) ceea ce conduce la relaţia :

$$\cos \alpha h \sin \alpha h \left(\frac{1}{\alpha h} + \alpha h \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{I}{I_1} \right) = 0$$

din care se poate stabili valoarea produsului αh, care defineşte sarcina critică.

Notînd cu: $\alpha h = V$ şi cu $K = \frac{1}{3} \frac{l}{h} \frac{I}{I_1}$, relaţia de mai sus se mai poate scrie :

$$c \ tg \ V = \frac{1}{V} + V K$$

Cea mai mică valoare V care satisface ecuaţia, care se

rezolvă prin încercări sau prin metodă grafo-analitică, reprezintă valoarea critică (Vcr) din care apoi se determină sarcina critică Pcr.

Ținînd seama că s-a notat cu : $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$, se va putea scrie în continuare relația :

$$\alpha^2 h^2 = \frac{P h^2}{EI} = V^2 \quad \text{și} \quad Pcr = \frac{Vcr^2 EI}{h^2}$$

Exprimînd valoarea sarcinii critice sub forma dată de Euler, obținem :

$$cr = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} = \frac{\pi^2 E I}{(\mu h)^2} = \frac{\pi^2 E I}{\left(\frac{\pi}{Vcr} h\right)^2}$$

Caz numeric :

Dacă : $1 = h$ și $I = I_2$, atunci : $K = \frac{1}{3}$

iar ecuația: $ctg V = \frac{\pi}{V} + VK$, devine : $\frac{tg V}{V} + \frac{V tg V}{3} = 1$

Soluția este : $V_{cr} = 3,725$

verificarea: $\frac{0,66064}{3,725} + \frac{3,725 \cdot 0,66064}{3} = 0,1775+0,8225=1,000$)

Rezultă :

$$l_f = \frac{\pi}{V_{cr}} h = \frac{\pi}{3,725} h = 0,843\ h \text{ și deci :}$$

$$Pcr = \frac{\pi^2 E I}{(0,843\ h)^2}$$

Observație :

Pentru pierderea stabilității barei AB, în funcție de rigiditatea barei BC, sînt două cazuri extreme: unul cînd bara BC este de rigiditate foarte mare și atunci pentru bara AB capătul B se consideră încastrat lungimea de flambaj fiind : $L_f = 0,7\ h$ - și altul, cînd bara BC este de rigiditate foarte mică, capătul B al barei AB se poate considera articulat - lungimea de flambaj fiind : $l_f = h$

Valoarea obținută, ($l_f = 0,843\ h$) se găsește între aceste două limite și prin evaluări aproximative ea poate fi apreciată cu ușurință; în funcție de raportul rigidităților celor două bare ce alcătuiesc sistemul.

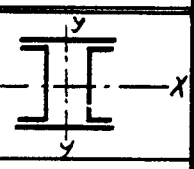
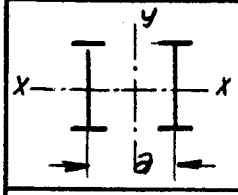
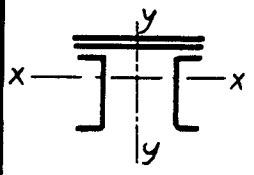
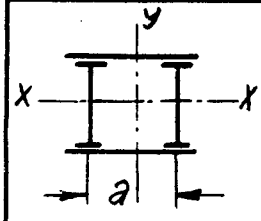
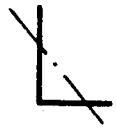
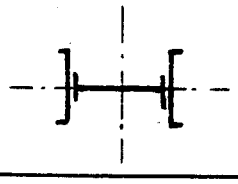
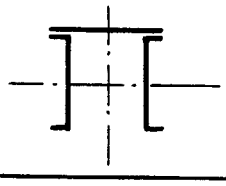
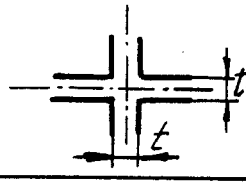
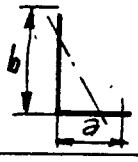
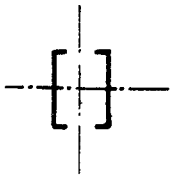
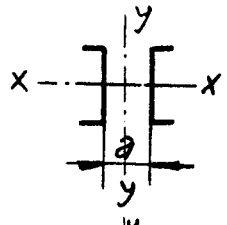
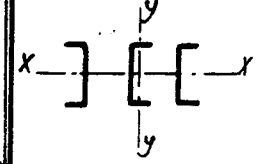
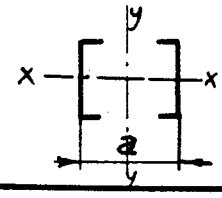
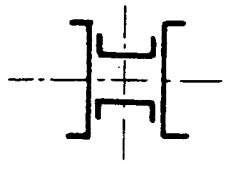
. o .

COEFICIENȚI DE FLAMBAJ

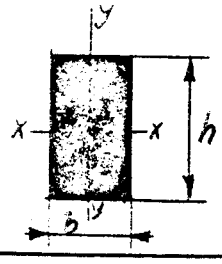
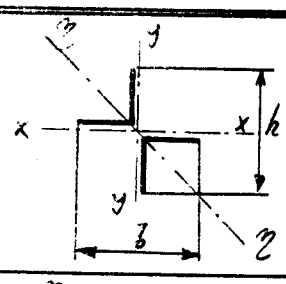
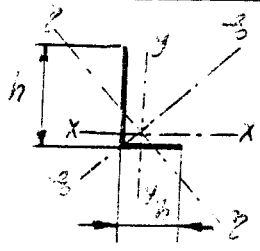
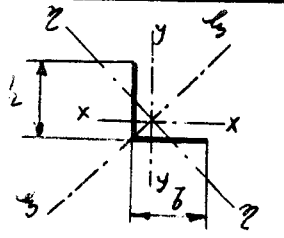
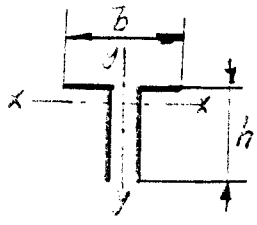
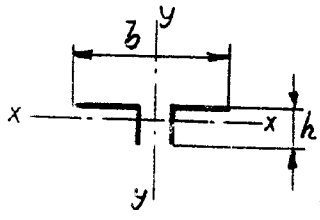
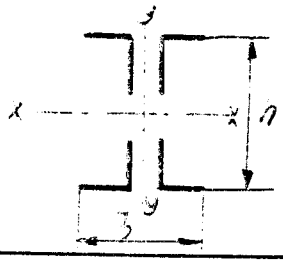
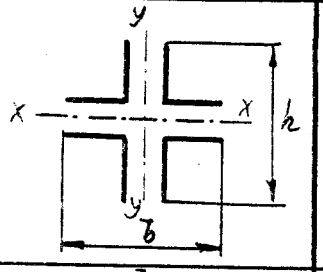
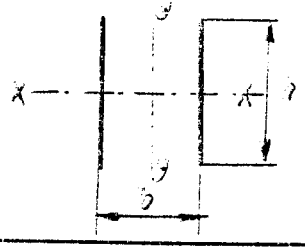
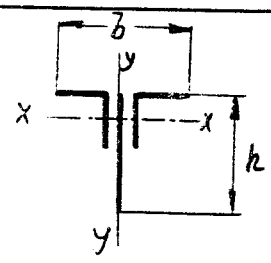
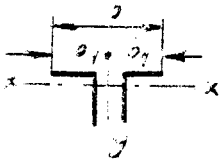
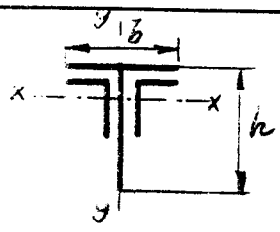
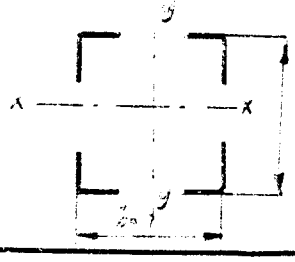
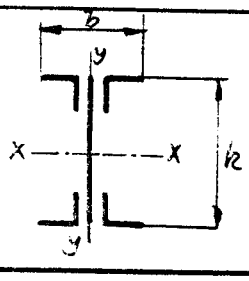
COEFICIENȚI DE FLAMBAJ φ PENTRU OL38 STAS 764-49

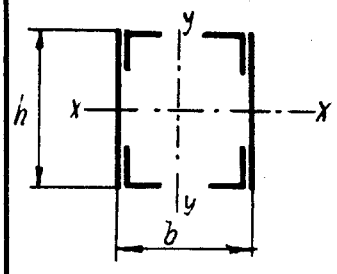
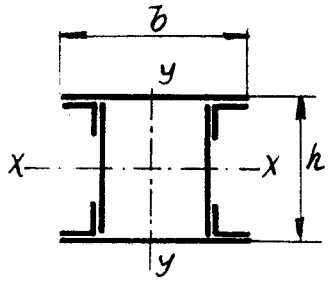
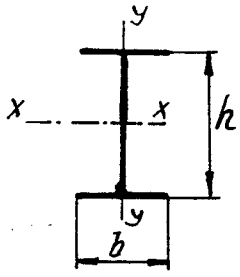
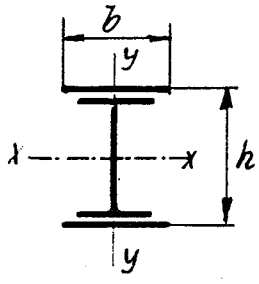
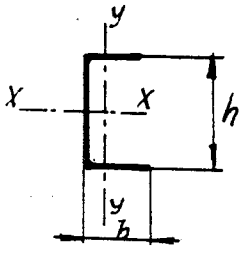
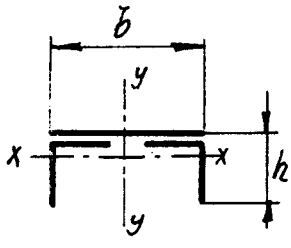
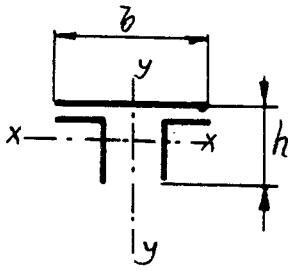
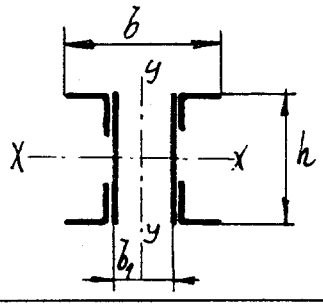
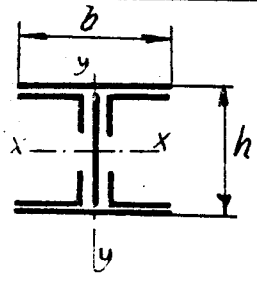
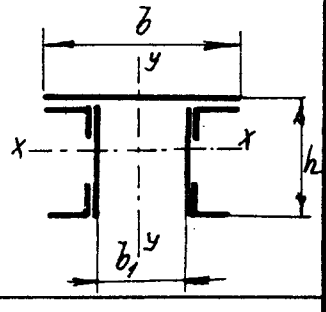
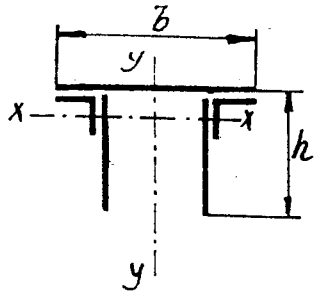
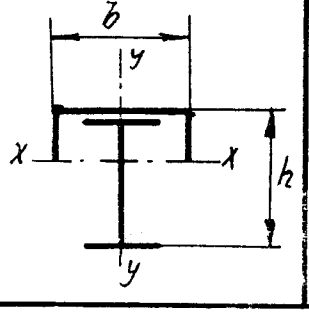
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,000	0,996	0,991	0,986	0,981	0,976	0,971	0,967	0,962	0,957
30	0,953	0,948	0,994	0,939	0,935	0,931	0,926	0,921	0,916	0,912
40	0,907	0,902	0,898	0,894	0,889	0,884	0,879	0,875	0,871	0,866
50	0,862	0,857	0,853	0,849	0,844	0,840	0,835	0,830	0,825	0,821
60	0,817	0,812	0,807	0,803	0,798	0,794	0,789	0,785	0,780	0,775
70	0,771	0,766	0,761	0,757	0,752	0,748	0,743	0,738	0,733	0,728
80	0,723	0,718	0,713	0,708	0,703	0,698	0,693	0,688	0,683	0,677
90	0,672	0,666	0,661	0,655	0,649	0,643	0,637	0,631	0,624	0,617
100	0,610	0,602	0,593	0,583	0,572	0,561	0,550	0,539	0,528	0,519
110	0,510	0,501	0,491	0,483	0,474	0,466	0,458	0,451	0,444	0,436
120	0,428	0,421	0,414	0,407	0,401	0,395	0,389	0,383	0,377	0,371
130	0,365	0,359	0,354	0,349	0,344	0,339	0,334	0,329	0,324	0,319
140	0,314	0,310	0,306	0,302	0,297	0,293	0,289	0,285	0,281	0,279
150	0,274	0,271	0,267	0,264	0,260	0,257	0,258	0,250	0,247	0,244

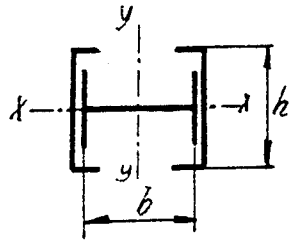
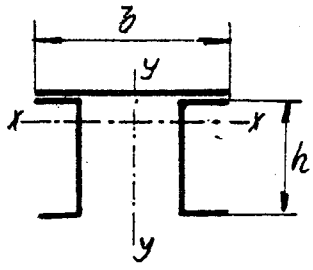
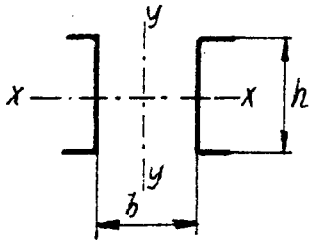
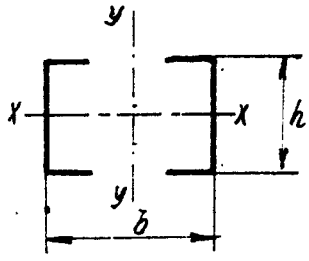
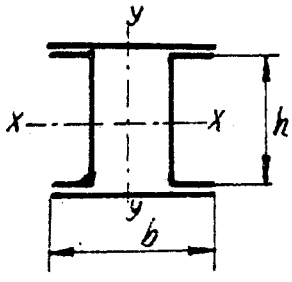
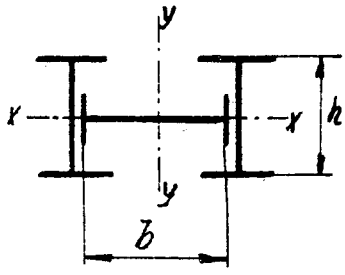
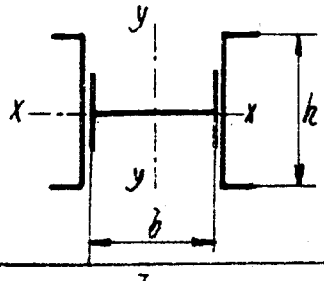
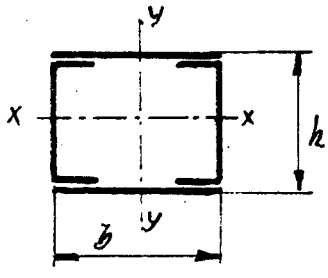
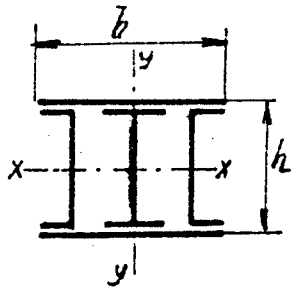
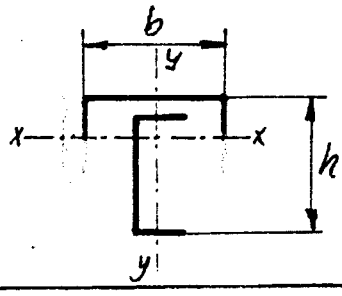
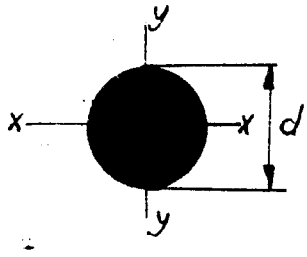
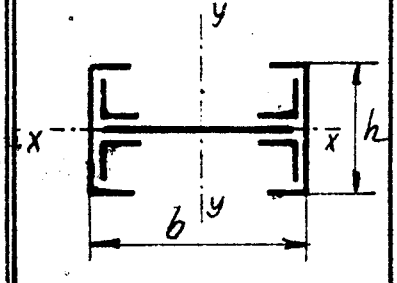
COEFICIENȚII DE PROFIL K
Distanțe în mm

Secțiunea	Observații	K	Secțiunea	Observații	K
	≥ I 14	11,0		Platbande 120×8 până la 600×15	1.90
	2I cu distanța între axe astfel ca $I_y \geq I_x + 10\%$	1,00		Din 2U cu 2 platbande 250×8 până la 600×15 (distanța între inimi 136 până la 324)	2,30
	I / Platbande 18 la 30 / 300×8 la 550×12 32 la 40 / 400×10 la 850×15 a = 200 ... 550	1.60 1.40		Corniere cu aripi egale ≥ 46×45×5	6,20
	I 12 până la 40	2,85		Corniere cu aripi egale ≥ 45×45×5	4,60
	Din 2U cu platbande 250×8 până la 600×15 (distanța între inimi 136 până la 342).	1.55		Cornier cu aripi egale cu distanța t = 8 / 10 / 12 / 15 / 20	4,50 / 4,20 / 4,00 / 3,80 / 3,60
	U 8 până la 30 nituite sau sudate fără interspații.	8.20		≥ 30×46×5 — a:b = 1:2 / a:b = 2:3 / Pt. celelalte corniere	10,0 / 7,00 / 7,50
	U 8 până la 30 sudate fără interspații.	1.20		≥ 50×65×5 — a:b = 1:2 / a:b = 2:3 / Pt. celelalte corniere	12,50 / 8,00 / 9,00
	U 8 până la 30 cu distanța între inimi a astfel ca $J_y \geq J_x + 10\%$	1,20		$I_y > I_x$	1,80
				I 12 până la 30 cm ⊨ 8 până la 30 cm	3,40

RAZE APROXIMATIVE DE GIRAȚIE

Forma sect.	Valoarea razelor de giratie	Forma sect.	Valoarea razelor de giratie
	$i_x = 0{,}289h$ $i_y = 0{,}289b$		$i_x = 0{,}21h$ $i_y = 0{,}21b$ $i_\eta = 0{,}185h$
	$i_x = 0{,}32h$ $i_y = 0{,}29b$ $i_\eta = 0{,}18\frac{h+b}{2}$		$i_x = 0{,}30h$ $i_y = 0{,}30b$ $i_\eta = 0{,}185b$ $i_\zeta = 0{,}81h$
	$i_x = 0{,}32h$ $i_y = 0{,}21b$		$i_x = 0{,}28h$ $i_y = 0{,}24b$
	$i_x = 0{,}45h$ $i_y = 0{,}24b$		$i_x = 0{,}21h$ $i_y = 0{,}21b$
	$i_x = 0{,}29h$ $i_y = 0{,}50b$		$i_x = 0{,}31h$ $i_y = 0{,}18b$
	$i_x = 0{,}30h$ $i_y = 0{,}22b$		$i_x = 0{,}26h$ $i_y = 0{,}21b$
	$i_x = 0{,}43h$ $i_y = 0{,}43b$		$i_x = 0{,}40h$ $i_y = 0{,}21b$

Forma secțiunii	Valoarea razelor de girație	Forma secțiunii	Valoarea razelor de girație
	$i_x = 0{,}37h$ $i_y = 0{,}45b$		$i_x = 0{,}45h$ $i_y = 0{,}30b$
	$i_x = 0{,}39h$ $i_y = 0{,}20b$		$i_x = 0{,}42h$ $i_y = 0{,}22b$
	$i_x = 0{,}39h$ $i_y = 0{,}29b$		$i_x = 0{,}29h$ $i_y = 0{,}37b$
	$i_x = 0{,}32h$ $i_y = 0{,}32b$		$i_x = 0{,}37h$ $i_y = 0{,}32b$ $i_y = 0{,}54b_1$
	$i_x = 0{,}45h$ $i_y = 0{,}24b$		$i_x = 0{,}40h$ $i_y = 0{,}34b$ $i_y = 0{,}53b_1$
	$i_x = 0{,}25h$ $i_y = 0{,}32b$		$i_x = 0{,}40h$ $i_y = 0{,}24b$

Forma secțiunii	Valoarea razelor de giratie	Forma secțiunii	Valoarea razelor de giratie
	$i_x = 0{,}32\,h$ $i_y = 0{,}40\,b$		$i_x = 0{,}39\,h$ $i_y = 0{,}32\,b$
	$i_x = 0{,}38\,h$ $i_y = 0{,}60\,b$		$i_x = 0{,}38\,h$ $i_y = 0{,}45\,b$
	$i_x = 0{,}45\,h$ $i_y = 0{,}32\,b$		$i_x = 0{,}32\,h$ $i_y = 0{,}49\,b$
	$i_x = 0{,}32\,h$ $i_y = 0{,}58\,b$		$i_x = 0{,}44\,h$ $i_y = 0{,}38\,b$
	$i_x = 0{,}42\,h$ $i_y = 0{,}30\,b$		$i_x = 0{,}365\,h$ $i_y = 0{,}275\,b$
	$i_x = i_y = 0{,}25\,d$		$i_x = 0{,}29\,h$ $i_y = 0{,}45\,b$

Cap. X SOLICITARI PRIN SOCURI

1.- In cazul elementelor de construcţie supuse la sarcini aplicate instantaneu, eforturile reale ce se nasc în acestea, sînt mult mai mari decît cele corespunzătoare cazului cînd sarcinile ar acţiona static.

Intre efortul unitar normal, cînd sarcina acţionează static, σ_{st} şi acela cînd sarcina acţionează dinamic σ_d, exostă relaţia :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st}$$

unde ψ este coeficientul dinamic sau de impact, fiind totdeauna supraunitar.

Aceleaşi relaţii se pot scrie între alungirile statice şi dinamice la solicitări axiale, sau între deplasările statice şi dinamice la un element supus la fenomenul de încovoiere.

$$\Delta l_d = \psi \Delta l_{st}$$

$$f_d = \psi \cdot f_{st}$$

2.- Expresia generală a coeficientului de impact este:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_o}{U_i}}$$

unde :

E_o - energia cinetică a corpului care loveşte

U_i - energia potenţială de deformaţie a corpului lovit.

Expresia energiei cinetice se poate scrie :

$$E_o = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 \text{ sau } E_o = Ph$$

unde :

P - este greutatea corpului care loveşte

V - este viteza în momentul şocului

h - este înălţimea de cădere a corpului

iar energia potenţială de deformaţie are forma următoare :

$$Wd = \frac{1}{2E} \int_o^l \frac{Nx^2}{A} dx$$ - în cazul solicitării axiale

$$Wd = \frac{1}{2E} \int_o^l \frac{Mx^2}{I} dx$$ - în cazul solicitării de încovoiere

Formulele coeficientului de impact vor fi :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta l_{st}}}$$ - la eforturi axiale

şi

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g f_{st}}}$$ - la încovoiere

Se atrage atenţia că în formulele de mai sus nu s-a ţinut

seara de masa elementului (barei) lovit.

3.- Dacă se ia în considerare masa barei lovite, expresia coeficientului de impact devine :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}(1+k)}} \quad \text{sau} \quad \psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{r_{st}(1+K)}}$$

unde coeficientul K are următoarele valori pentru cazurile de mai jos :

a). Pentru bara supusă la eforturi axiale prin şoc :

$$K = \frac{G}{3P}$$

G - fiind greutatea barei, iar P sarcina care se aplică prin căderea pe bară.

b)- Pentru o bară încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, supusă la acţiunea unei sarcini concentrate aplicate la capătul ei :

$$K = \frac{33}{140}\,\frac{G}{P}$$

c). Pentru o bară simplu rezemată, lovită de o forţă la mijlocul ei :

$$K = \frac{17}{35}\,\frac{G}{P}$$

10.1.- Se dă un stîlp metalic de lungime l, avînd secţiune circulară, supus la o şarcină P care cade de la înălţimea h. Se cere să se verifice rezistenţa elementului în trei variante (a), (b) şi (c).

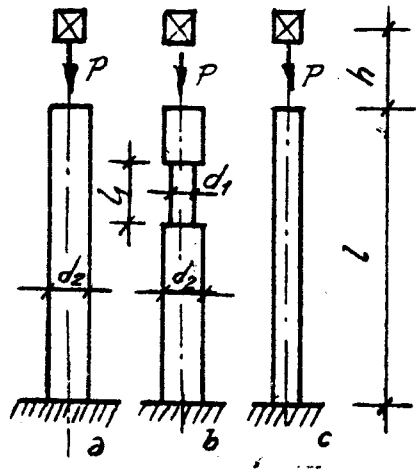


Fig.388

Exemplu numeric :

P = 500 kg

h = 5 cm

l = 3,00 m

d1 = 5 cm A1 = 19,6 cm^2

d2 = 7 cm A2 = 38,4 cm^2

l_1 = 0,50 m

E = 2,1 x 10^6 kg/cm^2

a) Efortul unitar static, este :

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A2} = \frac{500}{38,4} = 13 \text{ kg/cm}^2$$

Deformaţia statică a barei :

$$\Delta l_{st} = \frac{P\,l}{EA_2} = \frac{500 \times 300}{2,1 \times 10^6 \times 38,4} = 0,00186 \text{ cm}$$

Coeficientul dinamic se determină astfel :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 5}{0,00186}} = 1 + \sqrt{1 + 5380} =$$

$$= 1 + 73 = 74$$

Efortul unitar dinamic va fi :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 74 \times 13 = 966 \text{ kg/cm}^2$$

b). Efortul unitar static este :

$$\sigma_{st} = \frac{P}{AI} = \frac{500}{19,6} = 25,6 \text{ kg/cm}^2$$

Deformaţia statică a barei :

$$\Delta l_{st} = \frac{P l_1}{EA_1} + \frac{P (l-l_1)}{EA_2} = \frac{500 \times 50}{2,1 \times 10^6 \times 19,6} + \frac{500 \times 250}{2,1 \times 10^6 \times 38,4} =$$

$$= 0,000618 + 0,00155 = 0,00216 \text{ cm}$$

Coeficientul dinamic se determină astfel :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 5}{0,00216}} = 1 + \sqrt{1 + 4640} =$$

$$= 1 + 67,8 = 68,8$$

Efortul unitar dinamic este :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 68,8 \times 25,6 = 1760 \text{ kg/cm}^2$$

c). Efortul unitar static :

$$\sigma_{st} = \frac{P}{AI} = \frac{500}{19,6} = 25,6 \text{ kg/cm}^2$$

Deformaţia statică a barei este :

$$\Delta l_{st} = \frac{P \ l}{E \ AI} = \frac{500 \times 300}{2,1 \times 10^6 \times 19,6} = 0,00365 \text{ cm}$$

Coeficientul dinamic se determină astfel :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 5}{0,00365}} = 1 + \sqrt{1 + 2740} = 1 + 51,3 = 52,3$$

Efortul unitar dinamic va fi :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 52,3 \times 25,6 = 1340 \text{ kg/cm}^2$$

Se vede că în cazul (c) secţiunea rezistă în condiţii mai bune decît în varianta (b) din cauze că bara prezintă discontinuităţi ale secţiunii în lungul ei.

10.2.- Să se calculeze efortul normal unitar, dinamic şi săgeata maximă care apar în grinda din figură avînd ca secţiune un profil I 16, dacă la capătul consolei cade o greutate P = 100 kg de la o înălţime h = 5 cm.

Nu se va ţine seama de greutatea proprie a grinzii.

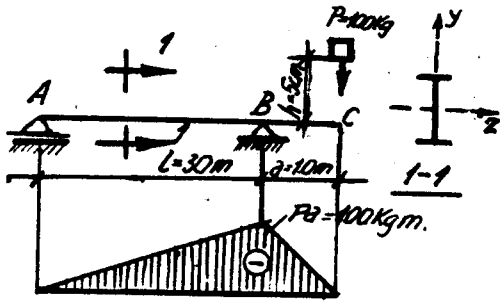


Fig.389

Se dă: l = 3,oo m şi a = 1,oo m.

Stabilind diagrama de momente încovoietoare se vede că momentul maxim este în porţiunea B şi are valoarea :

$M_{max} = Pa = 100 \times 1,0 = 100$ kg.cm

Modulul de rezistenţă fiind Wz = 117 cm^3, se poate determina efortul normal unitar static :

$$\sigma_{st} = \frac{M_{max}}{Wz} = \frac{10000}{117} = 85,4 \text{ kg/cm}^2$$

Deplasarea statică maximă (în punctul C) are expresia :

$$y_{st} = \frac{Pa^2 l}{3EI}\left(1+\frac{a}{l}\right) = \frac{100 \times 100^2 \times 300}{3 \times 2,1 \times 10^6 \times 935}\left(1+\frac{100}{300}\right) = 0,0678 \text{ cm}$$

Coeficientul dinamic ψ se calculează cu formula :

$$\psi = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{y_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2 \times 5}{0,0678}} = 1+12,2 = 13,2$$

Efortul unitar dinamic: $\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 13,2 \times 85,4 = 1130$ kg/cm^2.

Săgeata maximă în urma aplicării dinamice a forţei P, este :

$$y_d = \psi y_{st} = 13,2 \times 0,0678 = 0,892 \text{ cm}$$

Se poate remarca că eforturile şi deplasările cresc de peste 10 ori în urma şocului produs de forţa P care cade la la înălţime.

10.3.- Se dă grinda încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, din oţel, pe care cade o greutate G de la înălţimea H. Se cere să se determine comparativ eforturile în grindă efectuînd calculul în două variante.

a) cînd grinda are secţiune constantă

b) cînd grinda este de egală rezistenţă la încovoiere.

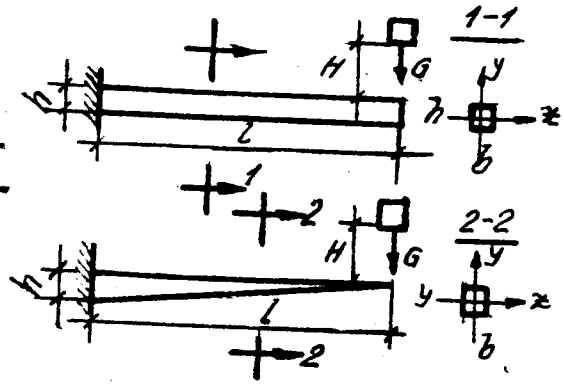


Fig. 390

Se face menţiunea că secţiunile din încastrare sînt aceleaşi.

Eforturile în grindă, în cazul aplicării dinamice a sarcinilor vor fi de forma :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st}$$

unde ψ este coeficientul de impact egal cu :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{Eo}{Ui}}$$

iar Eo şi Ui sînt energia cinetică a corpului care loveşte şi respectiv energia potenţială de deformaţie a grinzii.

Eforturile unitare normale în grindă, cînd sarcina se aplică static - σ_{st}, - în încastrare la ambele grinzi sînt aceleaşi

$$\sigma_{st} = \frac{M_{max}}{W_z}$$

unde : $M_{max} = - Gl$

$$W_z = \frac{b h^2}{6}$$

Deosebirea deci va surveni în expresia coeficientului de impact şi anume :

Energia cinetică a corpului care loveşte este aceiaşi în ambele variante: E = GH; singurul termen care trebuie determinat este energia potenţială de deformaţie a grinzii Ui, a cărei expresie este :

$$Ui = 1/2 \int \frac{Mx^2}{EI} dx$$

In varianta (a) energia de deformaţie va fi :

$$Ui_1 = 1/2 \int_0^l \frac{(Px)^2}{E \frac{b h^3}{12}} dx = \frac{6 P^2}{E b h^3} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \frac{2 P^2 l^3}{E b h^3}$$

In cea de a doua variantă, momentul de inerţie într-o secţiune curentă x, va fi :

$$I_x = \frac{by^3}{12} = \frac{b h^3}{12} \left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}$$

unde : $y = h \sqrt{\frac{x}{l}}$

Expresia energiei de deformaţie devine :

$$Ui_1 = \frac{1}{2} E \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{\frac{b h^3}{12} \left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}} = \frac{6 P^2 l^{3/2}}{E b h^3} \int_0^{l_{3/2}} x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{6 P^2 l^{3/2}}{E b h^3} \cdot \frac{l^{3/2}}{3/2} = \frac{4 P^2 l^3}{E b h^3}$$

Rezultă în concluzie că în al doilea caz, energia de deformaţie a grinzii este dublă ($Ui_2 > Ui_1$), deci coeficientul de impact va fi mai mic în varianta (b), decît în varianta (a). $\psi_2 < \psi_1$ şi $\sigma_{d_2} < \sigma_{d_1}$ - comportarea unei grinzi de egală

rezistenţă la şoc este mult mai favorabilă decît a unei grinzi cu secţiune constantă.

10.4 Un sloi de gheaţă în greutate de 160 kg plutind cu o viteză de 1 m/sec, loveşte un pilot de lemn ∅ 25. Să se determine rezistenţa maximă a pilotului.

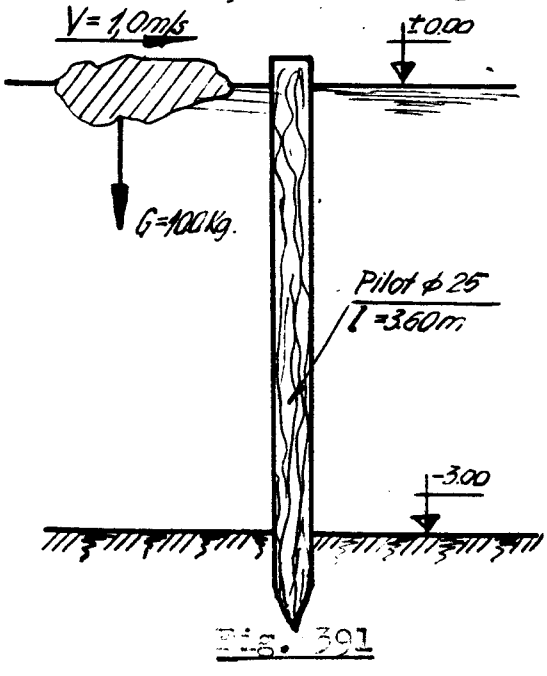


Fig. 391

Se va calcula coeficientul de impact ψ (neglijînd masa pilotului de lemn) utilizînd expresia :

$$\psi = \sqrt{\frac{E_o}{U_i}}$$

unde am notat cu: Eo - energia cinetică a sloiului de gheaţă;
Ui - energia potenţială de deformaţie a pilotului.

Formula de mai sus provine din relaţia : $E_o = \psi^2 U_i$ adică :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G_d . \delta_d = \psi^2 . \frac{1}{2} G_{st} . \delta_{st}$$

Deoarece: $G_d = \psi . G_{st}$ iar

$$\delta_d = \psi . \delta_{st}$$

Neglijînd frecarea dintre sloi şi apă, energia cinetică a sloiului de gheaţă, Eo va fi :

$$E_o = \frac{m v^2}{2} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{2} = \frac{160}{981} \times \frac{100^2}{2} = 509 \text{ kg cm}$$

iar energia potenţială de deformaţie a pilotului Ui, va fi :

$$U_i = \frac{1}{2} G . \delta_{st}$$

unde: δ_{st} reprezintă săgeata statică maximă a pilotului încastrat la partea inferioară şi liber la partea superioară şi a cărei expresie şi valoare este următoarea :

$$\delta_{st} = \frac{G l^3}{3 EI} = \frac{100 \times 300^3}{3 \times 10^5 \times 19200} = 0,47 \text{ cm}$$

unde momentul de inerţie este:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \times 25^4}{64} = 19200 \text{ cm}^4$$

Rezultă energia potenţială de deformaţie Wd :

$$U_i = \frac{1}{2} G . \delta_{st} = \frac{1}{2} \times 100 \times 0,47 = 23,5 \text{ kg.cm}$$

Coeficientul de impact reiese :

$$\psi = \sqrt{\frac{500}{23,5}} = 4,67$$

Efortul unitar normal maxim la baza pilotului, dacă sarcina acţionează static, va fi :

$$\sigma_{max} = \frac{M\ max}{W} = \frac{30000}{1540} = 19,5\ kg/cm^2$$

$$M\ max = 100 \times 300 = 30000\ kg \cdot cm$$

$$W = \frac{I}{\frac{d}{2}} = \frac{19800}{12,5} = 1540\ cm^3$$

Blocul de ghiaţă acţionînd dinamic, efortul maxim în pilotul de lemn va fi :

$$\sigma_d = \beta \cdot \sigma_{st} = 4,67 \times 19,5 = 92\ kg/cm^2$$

Se poate remarca efectul fenomenului de şoc, care face ca eforturile în pilot să crească de aproape 5 ori faţă de situaţia cînd sarcina dată de sloiul de ghiaţă s-ar aplica static.

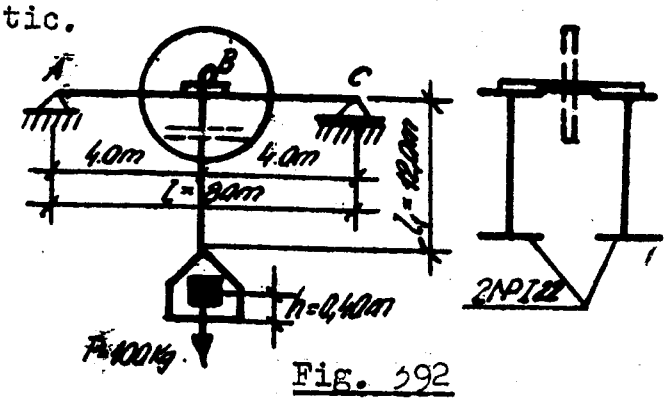


Fig. 292

10.5.- Pe o grindă metalică AC (l=8,00 m) alcătuită din două profile laminate I 22, se găseşte un troliu pentru ridicarea greutăţilor.

Presupunînd că pe platformă cade o greutate de 100 kg de la o înălţime de 40 cm, se cere să se determine efortul unitar normal maxim în cablu şi în grindă. Se dau caracteristicile cablului : $A_c = 2\ cm^2$ $E_c = 2,1 \times 10^6\ kg/cm^2$

Coeficientul de impact are expresia următoare :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_o}{U_i}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$$

unde :

E_o - energia cinetică

U_i - energia potenţială de deformaţie

h - înălţimea de cădere a sarcinii

δ_{st} - este deplasarea statică.

Deplasarea δ_{st} este compusă din alungirea cablului şi din săgeata grinzii în dreptul punctului B, adică :

$$\delta_{st} = \delta_{cablu} + \delta_{grindă} = \frac{Pl_1}{E_o A_c} \quad \frac{Pl^3}{48\ E_g I_g} =$$

$$= 100\left[\frac{1200}{2,1 \times 10^6 \times 2,0} + \frac{800^3}{48 \times 2,1 \times 10^6 \times 2 \times 2960}\right] =$$

$$= 0,0286 + 0,0856 = 0,1142 \text{ cm}$$

Rezultă: $\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 40}{0,1142}} = 1 + 26,5 = 27,5$

Eforturile unitare în cablu şi în grindă metalică, produse de sarcina P, dacă aceasta se aplică static :

a). în cablu :

$$\sigma_{c\,st} = \frac{P}{A_c} = \frac{100}{2,0} = 50 \text{ kg/cm}^2$$

b). în grindă :

$$\sigma_{g\,st} = \frac{M\ max}{W_z} = \frac{20000}{490} = 40,8 \text{ kg/cm}^2$$

unde :

$$M\ max = \frac{P\,l}{4} = \frac{100 \times 800}{4} = 20000 \text{ kg.cm}$$

iar :

$$W_z = 2 \times 245 = 490 \text{ cm}^3$$

In realitate însă, sarcina P se aplică dinamic, eforturile produse vor fi de forma :

$$\sigma_d = \psi . \sigma_{st}$$

a). în cablu :

$$\sigma_{c\,d} = \psi . \sigma_{c\,st} = 27,5 \times 50 = 1375 \text{ kg/cm}^2$$

b) în grindă

$$\sigma_{g\,d} = \psi . \sigma_{g\,st} = 27,5 \times 40,8 = 1125 \text{ kg/cm}^2$$

Se vede că efectul şocului se resimte foarte puternic, eforturile crescînd de circa 30 ori faţă de situaţia cînd sarcina s-ar aplica static.

10.6.- Se dă grinda din figură, avînd ca secţiune un profil I, solicitată de o sarcină P care cade pe mijlocul deschiderii ei de la o înălţime h.

Neţinîndu-se seama de greutatea proprie, se cere :

1.- Să se dimensioneze grinda avînd reazeme rigide.

2.- Să se dimensioneze grinda avînd reazeme elastice constînd din resorturi elicoidale,

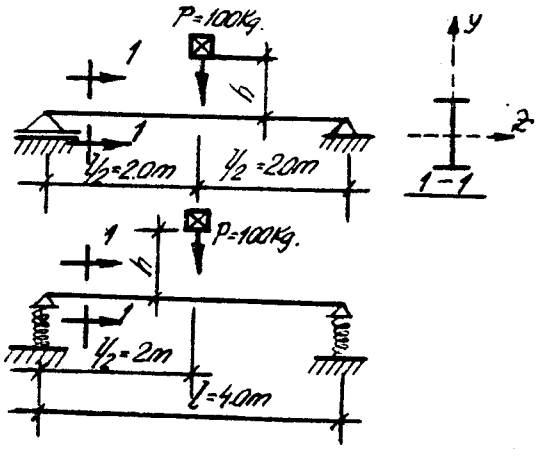


Fig. 393

cu raza de înfăşurare R = 6,4 cm, diametrul firului d = 1,6 cm şi numărul de spire n = 4.

Rezistenţa admisibilă se va lua: $\sigma_a = 1400$ kg/cm^2

$E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2

$G = 8{,}1 \times 10^5$ kg/cm^2

1.- Alegînd (prin încercări) un profil I 14, efortul unitar static va fi :

$$\sigma_{st} = \frac{M\ max}{W_z} = \frac{10000}{81{,}9} = 122 \text{ kg/cm}^2$$

unde :

$$M\ max = \frac{100 \times 4}{4} = 100 \text{ kgm}$$

Coeficientul dinamic ψ are valoarea :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}}}$$

yst este deplasarea statică a grinzii, avînd ca expresie în acest caz :

$$y_{st} = \frac{P l^3}{48 EI} = \frac{100 \times 400^3}{48 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 573} = 0{,}11 \text{ cm}$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 5}{0{,}11}} = 1 + 9{,}56 = 10{,}56$$

Atunci efortul unitar dinamic va fi :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 10{,}57 \times 122 = 1290 \text{ kg/cm}^2$$

2.- In cazul resortului pentru calcul deplasării vom aduna la deplasarea grinzii (yst) şi deformaţia resortului elicoidal, astfel că vom avea nevoie de un profil mai mic.

Vom face încercări, oprindu-ne la un profil I 10.

Deplasarea grinzii va fi :

$$y_1 st = \frac{P l^3}{48 EI} = \frac{100 \times 400^3}{48 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 171} = 0{,}37 \text{ cm}$$

Deformaţia statică a resortului elicoidal este dată de formula :

$$y\ 2\ st = \frac{64\ P R^3 n}{G d^4} = \frac{64 \times 50 \times 6{,}4^3 \times 4}{8{,}1 \times 10^5 \times 1{,}69} = 0{,}635 \text{ cm}$$

Deplasarea statică totală este dată de relaţia :

$$y_{st} = y_1\ st + y_2\ st = 0{,}37 + 0{,}635 = 1{,}005 \text{ cm}$$

Coeficientul dinamic va fi :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\ h}{y\ st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 5}{1{,}005}} = 1 + 3{,}3 = 4{,}3$$

Efortul unitar static :

$$\sigma_{st} = \frac{M\ max}{Wz} = \frac{10000}{34,2} = 293\ kg/cm^2$$

Efortul unitar dinamic va fi :

$$\sigma_d = \psi . \sigma_{st} = 4,3 \times 293 = 1265\ kg/cm^2 < 1400\ kg/cm^2$$

Se vede că în cazul reazemelor elastice, secţiunea necesară pentru grindă este mult mai mică.

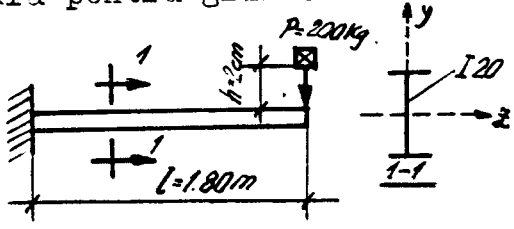


Fig.394

10.7.- Se dă grinda încastrată avînd secţiunea dintr-un profil I 20 din figură, solicitată de o forţă P, care cade de la o înălţime h.

Se cere :

1.- Să se verifice efortul unitar normal dinamic în două variante, neluîndu-se în considerare greutatea proprie a grinzii şi apoi ţinînd seama de ea.

2.- Se vor calcula apoi deplasarea la capătul grinzii în ambele variante.

1/. Dacă nu ţinem seama de greutatea proprie, efortul unitar static va fi :

$$\sigma_{st} = \frac{M\ max}{W\ z} = \frac{36000}{214} = 168\ kg/cm^2$$

M max = 200 x 1,8 = 360 kgm

Deplasarea statică este :

$$yst = \frac{P\ l^3}{3EI_z} = \frac{200 \times 180^3}{3 \times 2,1 \times 10^6 \times 2140} = 0,086\ cm$$

Coeficientul dinamic are expresia :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\ h}{y\ st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 20}{0,086}} = 1 + 6,87 = 7,87$$

Efortul unitar dinamic va fi :

$$\sigma_d = \psi . \sigma_{st} = 7,87 \times 168 = 1325\ kg/cm^2 < \sigma_a = 1400\ kg/cm^2$$

In cazul cînd ţinem seama de greutatea proprie a grinzii, momentul încovoietor va fi o sumă de două momente încovoietoare unul datorit sarcinii P, iar altul datorit greutăţii proprii g, avînd valorile :

$$M1 = Pl = 200 \times 1,8 = 360\ kgm$$

$$M^g = \frac{g\,l^2}{2} = \frac{26,3 \times 1,8^2}{2} = 42,7 \text{ kg.m}$$

Coeficientul dinamic în acest caz are valoarea :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140}\frac{G}{P}}}$$

unde : G = gl, în cazul nostru: G = 26,3 x 1,8 = 47 kg.

Inlocuind toate datele în expresia coeficientului dinamic, obţinem :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 2}{0086} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{144}\frac{47}{200}}} = 1 + \sqrt{1 + 44,3} = 1 + 6,76 =$$

$$= 7,76$$

Efortul unitar normal, static se compune (ca şi momentul încovoietor) din doi termeni, unul provenit din sarcina dinamică P — şi altul datorit greutăţii proprii g.

Astfel : $\sigma_1 = \frac{M_1}{W_z} = \frac{36000}{214} = 167,5 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{W_z} = \frac{4270}{214} = 19,9 \text{ kg/cm}^2$$

Efortul unitar dinamic va fi în acest caz :

$$\sigma_d = \psi \times \sigma_1 + \sigma_2 = 7,76 \times 167,5 + 19,9 = 1300 + 19,9 =$$

$$= 1319,9 \text{ kg/cm}^2$$

Efectul greutăţii proprii este favorabil.

2.- Deplasarea dinamică în primul caz este :

$$y_d = \psi \times y_{st} = 7,87 \times 0,086 = 0,678 \text{ cm}$$

iar în cea de a doua variantă avem :

$$y'_d = y_{1st} \times \psi + y_{2st} = 0,086 \times 7,47 + 0,0076 = 64 \times 0,0076 =$$

$$= 0,6476 \text{ cm.}$$

unde deplasarea y2st este datorită greutăţii proprii şi anume:

$$y_{2st} = \frac{ql^4}{8\,EI} = \frac{0,263 \times 180^4}{8 \times 2,1 \times 10^6 \times 2140} = 0,0076 \text{ cm}$$

. o .

rp
Cd.77 din 5.III.1966

T A B L A D E M A T E R I I

pag

Cap. VI - Deformaţia barelor. 1

Cap. VII - Răsucirea cu încovoiere 54

Cap. VIII - Solicitări axiale cu încovoiere 109

Cap. IX - Flambajul 142

Cap. X - Solicitpri prin şoc. 189

rp
Cd.267/28.II.1967.

B I B L I O G R A F I E

I. Н.М.Беляев – Сборник задач по сопротивлению материалов, Москва 1965.

2. С.М.Белявский – Руководство к решению задач по сопротивлению материалов, Москва 1964.

3. A.A. Baliş, N.I. Filipescu – Rezistenţa materialelor, vol.II, Bucureşti, Editura tehnică 1957.

4. O. Belluzzi – La stabilità dell equillibrio elastico. La vibrazioni. Scienza della constcntzionà. Ed.Zanichelli - Bologna, 1955.

5.Ghe. Buzdugan – Rezistenţa materialelor. Editura didactică şi pedagogică – Bucureşti 1964.

6. Gh. Buzdugan, A.Beleş ş.a. – Culegere de probleme din Rezistenţa Materialelor, Bucureşti, 1962 (vol.I), 1963 (vol.II).

7. И.В. Дарков, В.И. Кузнецов – Строительная сооружении, Москва 1951.

8. I. Deutsch – Probleme de Rezistenţa Materialelor, Bucureşti 1961.

9. M.Filipescu-Bolocan – Rezistenţa materialelor (traduc.) partea I 1951, partea II, 1952.

10. Eugen Oţeleanu – Rezistenţa materialelor în probleme şi aplicaţii (vol.I şi vol.V), Timişoara 1958.

II. Н.М. Игначов – Сборник задач по сопротивлению материалов, Москва 1956.

12. W.Orlowski, . Slowanski – Wytrymalosč Materialów, Przykłady Obliczeń Warszawa 1962.